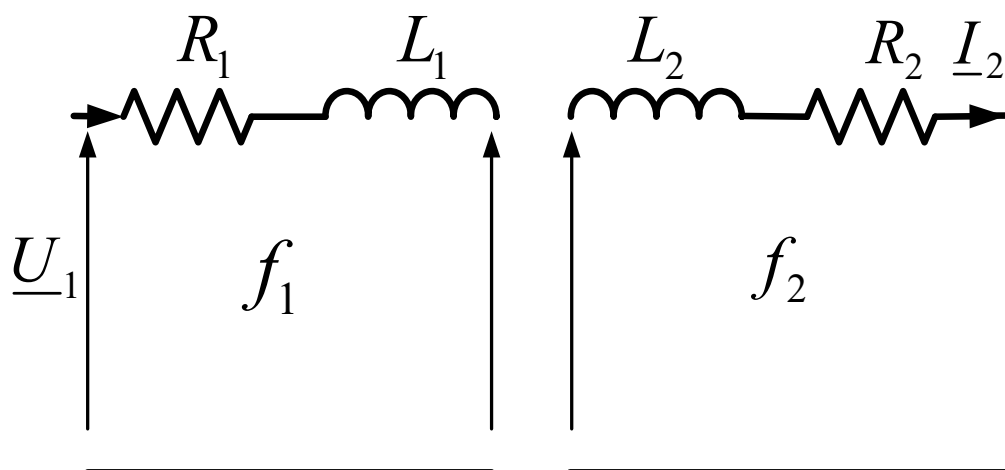


## SCHEMAT ZASTĘPCZY MASZYNY INDUKCYJNEJ

Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej pierścieniowej opiera się na zjawiskach wynikających z jego zasady działania (Rys. 1). Przyjmijmy, że maszyna zasilana jest symetrycznym napięciem trójfazowym. Napięcie to wymusi przepływ prądów, które wytworzą wirujące pole magnetyczne. Pole to spowoduje zaindukowanie się napięć w wirniku. Jego częstotliwość będzie proporcjonalna do poślizgu  $s$  oraz częstotliwości napięcia stojana  $f$ .



Rys. 1

*Reprezentacja zjawisk w maszynie indukcyjnej klatkowej*

Napięcie indukowane w wirniku spowoduje przepływ prądu w trzech fazach wirnika pierścieniowego. W takiej sytuacji w szczelinie powietrznej wystąpi wypadkowe wirujące pole magnetyczne, które w stanie ustalonym będzie powodowało indukowanie się napięć w uzwojeniach stojana i wirnika. Wartości napięć indukowanych będą różniły się wartością z uwagi na różną liczbę zwojów w stojanie i wirniku oraz inny sposób rozłożenia uzwojeń w żłobkach stojana i wirnika. W równaniu jednej fazy stojana należy uwzględnić rezystancję uzwojenia stojana  $R_1$ , indukcyjność rozproszenia  $L_1$  oraz napięcie indukowane od wirującego wypadkowego pola magnetycznego  $e_1$ , prądu oraz napięcia w stojanie zmieniają się sinusoidalnie z częstotliwością  $f$ , stąd (Rys. 1):

$$\underline{U}_1 = R_1 \underline{I}_1 + j2\pi f L_1 \underline{I}_1 + \underline{E}_1 \quad (1)$$

Równanie Kirchhoffa dla jednej fazy wirnika, w przypadku gdy pierścienie są zwarte, można opisać wzorem:

$$\underline{E}_2 = R_2 \underline{I}_2 + j2\pi s f L_2 \underline{I}_2 \quad (2)$$

Taka postać wzoru wynika z faktu, że napięcie w wirniku jest proporcjonalne do poślizgu. Wartość napięcia indukowanego w wirniku  $E_2$  jest proporcjonalna do jego wartości przy prędkości równej zero  $U_{20}$  oraz do wartości poślizgu  $s$ , stąd:

$$\underline{E}_2 = s\underline{U}_{20} = R_2 \underline{I}_2 + j2\pi s f L_2 \underline{I}_2 \quad (3)$$

Równanie wirnika możemy obustronnie podzielić przez poślizg  $s$ . Otrzymamy:

$$\underline{U}_{20} = \frac{R_2}{s} \underline{I}_2 + j2\pi f L_2 \underline{I}_2 \quad (4)$$

Dla maszyny indukcyjnej pierścieniowej możemy zdefiniować pojęcie przekładni  $k$ , której wartość jest związana z ilości zwojów uzwojenia stojana i wirnika oraz ze sposobu ich rozłożenia w na obwodzie stojana i wirnika:

$$k = \frac{E_1}{U_{20}} \quad (5)$$

W takim przypadku możemy wykonać przeliczenia wielkości wirnika do obwodu stojana uzyskując w ten sposób wartość napięcia sprowadzonego do obwodu stojana w sposób identyczny jak w transformatorze. Oznaczamy wielkości sprowadzone do obwodu stojana jako:

$$\underline{I}'_2 = \frac{I_2}{k} \quad (6)$$

$$R'_2 = k^2 R_2 \quad (7)$$

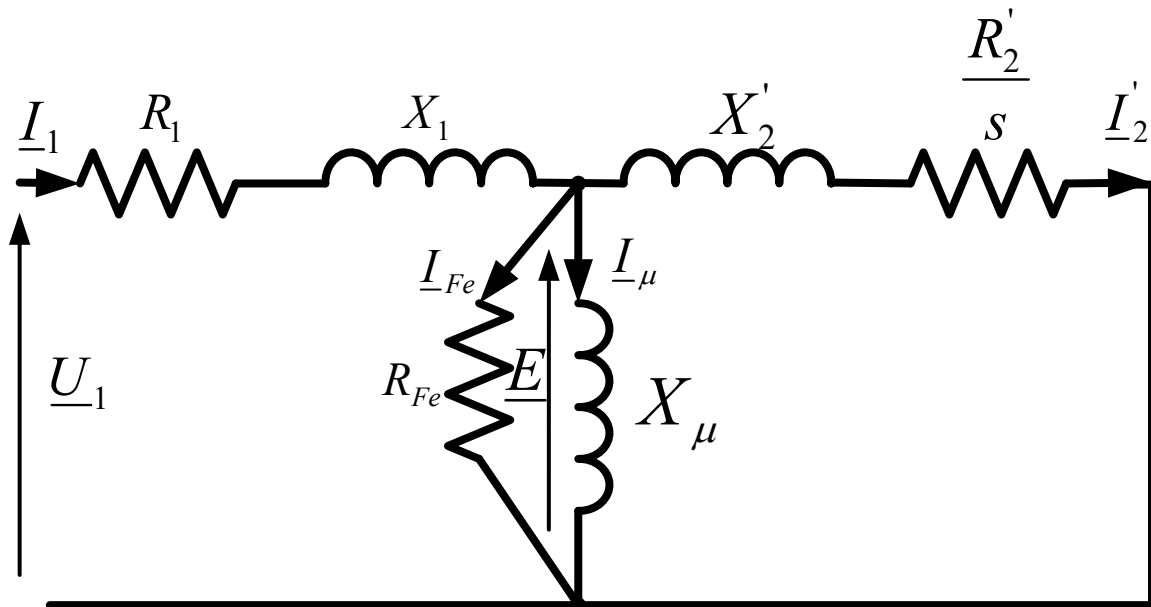
$$X'_2 = k^2 2\pi f L_2 \quad (8)$$

$$X_1 = 2\pi f L_1 \quad (9)$$

Otrzymamy:

$$k\underline{U}_{20} = \underline{E}_1 = \frac{R'_2}{s} \underline{I}'_2 + jX'_2 \underline{I}'_2 \quad (10)$$

Równania stojana i wirnika mają część wspólną jaką jest wartość napięcia indukowanego od wypadkowego pola wirującego i podobnie, jak w przypadku transformatora, możemy je zastąpić spadkiem napięcia na reaktancji magnesującej  $X_{\mu}$ . Możemy także uwzględnić fakt istnienia strat w żelazie stojana poprzez dołączenie równolegle do reaktancji magnesującej wartości rezystancji odpowiadającej za straty w żelazie  $R_{Fe}$  uzyskując schemat zastępczy maszyny asynchronicznej pokazany na Rys. 2.



Rys. 2 Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej klatkowej

Biorąc pod uwagę, że:

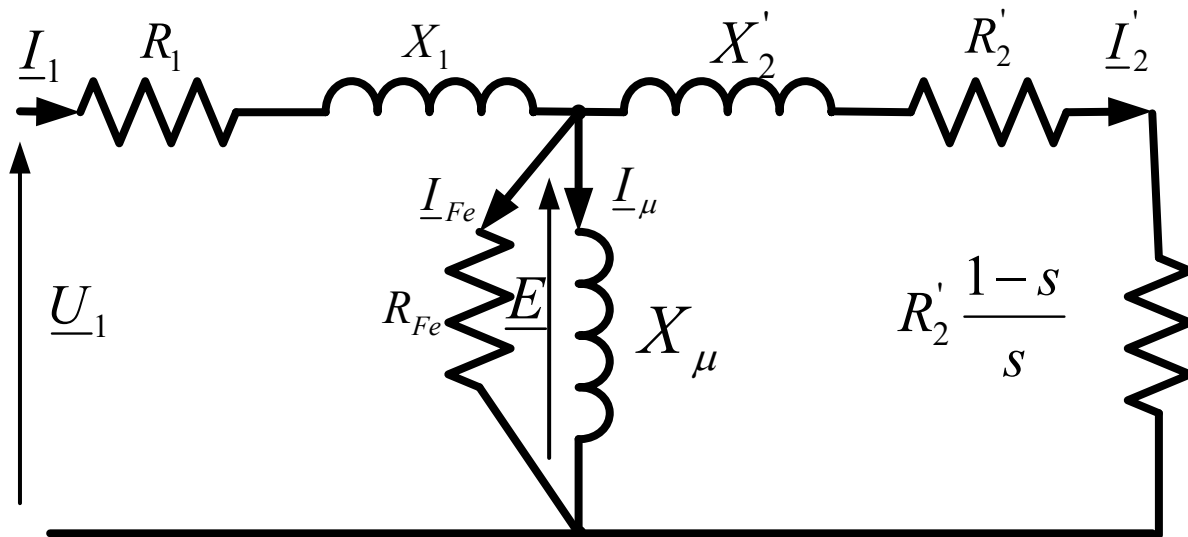
$$\frac{R_2'}{s} = R_2' + R_2' \frac{1-s}{s} \quad (11)$$

Schemat zastępczy możemy narysować w postaci (Rys. 3) pokazującej zamianę energii elektrycznej na mechaniczną oraz wskazanie składników związanych ze stratami energii na rezystancji stojana  $R_1$ , wirnika  $R_2'$ , oraz strat w żelazie  $R_{Fe}$ . Przekształcenie mocy elektrycznej na mechaniczną można wyrazić zatem zależnością:

$$P_M = \frac{1-s}{s} 3R_2' I_2'^2 \quad (12)$$

Oznaczając straty w wirniku jako sumę strat w 3 fazach na rezystancji wirnika jako:

$$\Delta P_{cu2} = 3R_2' I_2'^2 \quad (13)$$



Rys. 3 Schemat zastępczy maszyny indukcyjnej uwzględniający zamianę energii elektrycznej na mechaniczną.

Otrzymamy:

$$P_M = \frac{1-s}{s} \Delta P_{cu2} \quad (14)$$

Całkowita moc przekazywana za pośrednictwem wirującego pola magnetycznego nazywana jest często mocą idealną i jest równa:

$$P_i = \frac{\Delta P_{cu2}}{s} \quad (15)$$

Stąd:

$$P_M = (1-s)P_i \quad (16)$$

Moment elektromagnetyczny, wytworzony w maszynie indukcyjnej jest zatem równy:

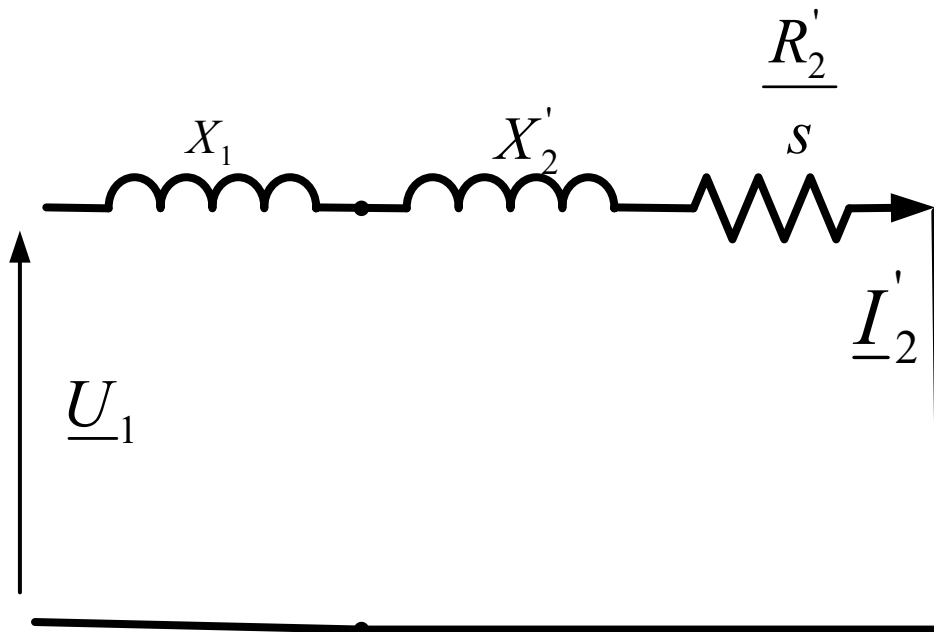
$$M_e = \frac{P_M}{\omega} = \frac{(1-s)P_i}{(1-s)\omega_s} = \frac{P_i}{\omega_s} = \frac{\Delta P_{cu2}}{\omega_s s} \quad (17)$$

Schemat zastępczy maszyny klatkowej ma identyczną postać jak dla maszyny pierścieniowej. Praktyczna różnica polega na fakcie, że do uzwojeń wirnika w maszynie pierścieniowej możemy dołączyć dodatkowe składniki, natomiast maszyna klatkowa ma trwale uzwojenie zwarte. Rozwiązanie takie jest znacznie tańsze a jednocześnie bardziej niezawodne od maszyny pierścieniowej.

W praktyce istotną zależnością w maszynie indukcyjnej jest zależność momentu od prędkości obrotowej. Zależność tą nazywamy charakterystyką mechaniczną. W celu uzyskania tej zależności przyjmijmy, że możemy pominąć prąd biegu jałowego. W przypadku małej wartości poślizgu  $s$  możemy także pominąć wartość rezystancji stojana:

$$R_1 \ll \frac{R_2'}{s} \quad (18)$$

Tak uproszczony schemat zastępczy maszyny indukcyjnej pokazano na Rys. 4.



Rys. 4 Uproszczony schemat zastępczy maszyny indukcyjnej

Wartość prądu wirnika możemy wówczas oszacować według zależności:

$$\underline{I}'_2 = \frac{\underline{U}_1}{\frac{R_2'}{s} + j(X_1 + X_2')} \quad (19)$$

Moment elektromagnetyczny jest równy:

$$M_e = \frac{3}{\omega_s} \frac{U_1^2}{\frac{R_2'^2}{s^2} + (X_1 + X_2')^2} \frac{R_2'}{s} \quad (20)$$

Po przekształceniu otrzymamy:

$$M_e = \frac{3}{\omega_s} \frac{U_1^2 R_2'}{s \frac{R_2'^2}{s} + s(X_1 + X_2')^2} \quad (21)$$

Wartości ekstremalne wyznaczmy z warunku:

$$\frac{dM_e}{ds} = 0 \quad (22)$$

Stąd:

$$-\frac{R_r'^2}{s^2} + (X_s + X_r')^2 = 0 \quad (23)$$

$$s_k = \pm \frac{R_r'}{X_s + X_r'} \quad (24)$$

Prędkość krytyczną możemy obliczyć ze wzoru:

$$\omega_k = \omega_s (1 - s_k) \quad (25)$$

Tak wyznaczoną wartość poślizgu nazywamy poślizgiem krytycznym, przy czym wartość dodatnia wyznacza nam maksymalną (krytyczną) wartość momentu przy pracy silnikowej a ujemna przy pracy generatorowej:

$$M_k = \pm \frac{3}{\omega_s} \frac{U_1^2}{2(X_1 + X_1')} \quad (26)$$

Podstawiając wzory (24) i (25) do równania (21) otrzymamy tzw. uproszczony wzór Klossa:

$$M_e = \frac{2M_k}{\frac{s}{s_k} + \frac{s_k}{s}} \quad (27)$$

Wzór Klossa jest bardzo wygodnym uproszczeniem charakterystyki mechanicznej silnika asynchronicznego, stąd bardzo często używany jest w technice do szacowania różnych wielkości w maszynie indukcyjnej

W katalogach producent podaje wartość tzw. przeciążalności momentem  $\lambda$ , który wyraża proporcje pomiędzy momentem krytycznym  $M_k$  a momentem znamionowym  $M_n$ :

$$\lambda = \frac{M_k}{M_n} \quad (28)$$

Wartość poślizgu krytycznego możemy wówczas obliczyć jako:

$$\frac{s_n}{s_k} + \frac{s_k}{s_n} = 2\lambda \quad (29)$$

$$s_k^2 - 2\lambda s_n s_k + s_n^2 = 0 \quad (30)$$

$$\Delta = 4\lambda^2 s_n^2 - 4s_n^2 = 4s_n^2(\lambda^2 - 1) \quad (31)$$

$$s_k = \frac{2\lambda s_n \pm 2s_n \sqrt{(\lambda^2 - 1)}}{2} \quad (32)$$

$$s_k = s_n (\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}) \quad (33)$$

Dwa rozwiązania są efektem symetrii względem poślizgu znamionowego i krytycznego. Jeśli obliczamy wartość poślizgu krytycznego na podstawie znajomości poślizgu znamionowego, wówczas liczymy jego wartość wg. zależności:

$$s_k = s_n (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \quad (34)$$

Analogiczne obliczenia poślizgu dla danego momentu obciążenia (na części stabilnej charakterystyki mechanicznej) należy wykonywać wg zależności:

$$s = s_k \left( \frac{M_k}{M} - \sqrt{\left(\frac{M_k}{M}\right)^2 - 1} \right) \quad (35)$$

Postępowanie takie umożliwia szacowanie prędkości obrotowej dla znanej wartości momentu obciążenia.

Wykorzystanie wzoru Klossa umożliwia analizę pracy maszyny indukcyjnej bez wyznaczania parametrów schematu zastępczego. Istotne znaczenie w przewidywaniu jak zmienia się wielkości typu moment krytyczna, poślizg krytyczny czy prędkość krytyczna ma znajomość

wpływu wielkości typu częstotliwość napięcia stojana,  $f$ , napięcia stojana  $U_1$  oraz rezystancji w obwodzie wirnika  $R_2'$  na wartość momentu i poślizgu krytycznego:

$$s_k = c_1 \frac{R_r'}{f} \quad (36)$$

$$M_k = c_2 \frac{U_1^2}{f^2} \quad (37)$$

### **Spis literatury:**

- [1] Chapman Stephen J.: Electrical Machinery Fundamentals. McGraw Hill, New York 2005
- [2] Fitzgerald A. E., Kingsley Ch., Unmans S. D.: Electric Machinery. McGraw Hill Higher Education 2003
- [3] Fleszar J., Śliwińska D., Zadania z maszyn elektrycznych, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2003
- [4] Hebenstreit J., Gientkowski Z., Maszyny elektryczne w zadaniach, Wydawnictwo Akademii Rolniczo-Technicznej, Bydgoszcz 2003
- [5] Mitew E., Maszyny Elektryczne, T1, T2, Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 2005
- [6] Paul C. Krause, Oleg Wasynczuk, Scott D. Sudhoff: Analysis of Electric Machinery and Drive Systems. John Wiley & Sons Inc. IEEE Press Piscataway, New York 2002
- [7] Plamitzer A.: Maszyny elektryczne. WNT, Warszawa 1982
- [8] Przyborowski W., Kamiński G.: Maszyny elektryczne, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2014.
- [9] Rene Le Doeuff, Mohamed El Hodi Zaim: Rotating Electrical Machines. John Wiley & Sons Inc., Hoboken 2010
- [10] Sen P. G., Principles of electric machines and Power electronics, John Wiley & Sons, Ontario 1997
- [11] Wildi Theodore: Electrical Machines, Drives and Power Systems. Pearson Education, New Jersey 2006
- [12] <http://www.noratel.com/fileadmin/content/downloads/school/3phTransformer.pdf>