DYNAMIKA MASZYN ASYNCHRONICZNYCH

Równania opisujące dynamikę maszyny możemy zapisać w postaci:

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} + j\omega_x \underline{\psi}_s \tag{1}$$

$$\underline{u}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + j(\omega_x - \omega)\underline{\psi}_r \tag{2}$$

Równania te należy uzupełnić o zależności pomiędzy strumieniami skojarzonymi a wartościami prądów. Dla maszyny asynchronicznej pierścieniowej, przy stosowaniu założeń upraszczających uwzględniających jedynie pierwszą harmoniczną pola magnetycznego w szczelinie powietrznej i idealnej symetrii maszyny, równania te w układzie współrzędnych naturalnych mają postać:

$$[\psi_s] = [L_{\sigma s}][i_s] + [M_{ss}][i_s] + [M_{sr}][i_r] \tag{3}$$

$$[\psi_r] = [L_{\sigma r}][i_r] + [M_{rr}][i_r] + [M_{sr}]^T[i_s] \tag{4}$$

Macierz indukcyjności związanych ze strumieniem rozproszenia stojana ma postać:

$$[L_{\sigma s}] = L_{\sigma s}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Macierz indukcyjności wzajemnych w obrębie uzwojeń stojana:

$$[M_{ss}] = M_{ss}\begin{bmatrix} 1 & \cos 120° & \cos 240° \\ \cos 240° & 1 & \cos 120° \\ \cos 120° & \cos 240° & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$[M_{ss}] = M_{ss}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

W równaniach (30 i (40 występują składniki macierzy indukcyjności mnożone przez wektor prądu:

$$[\psi]=[L][i] \qquad \textbf{\textit{(8)}}$$

Transformacja każdego z tych składników polega na lewostronnym mnożeniu przez macierz transformacji [S]. Wektor prądu także podlega transformacji stąd każy z tych składników musi być przeliczany zgodnie z równaniem:

$$[S][\psi]=[S][L][S]^{-1}[S][i] \qquad \textbf{\textit{(9)}}$$

Macierze indukcyjności są zatem transformowane zgodnie z zależnością:

$$[L_{\alpha\beta 0}]=[S][L_{UVW}][S]^{-1} \qquad \textbf{\textit{(10)}}$$

Macierz diagonalna indukcyjności rozproszenia nie zmienia swojej postaci, natomiast macierz indukcyjności wzajemnych po transformacji uzyska postać***:***

$$[M_{ss}^{\alpha\beta 0}]=\frac{3}{2}M_{ss}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (11)$$

Macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik zależy od liczby faz wirnika. Można udowodnić, że każde symetryczne uzwojenie wielofazowe, przy uwzględnieniu jedynie podstawowej harmonicznej pola, można przedstawić w postaci równoważnego układu dwufazowego. Dla wirnika klatkowego jako liczbę faz przyjmuje się liczbę prętów klatki wirnika. Dla uproszczenia analizy przyjmijmy, że liczba faz wirnika jest równa liczbie faz stojana (silnik pierścieniowy). Przy takich założeniach macierze indukcyjności wirnika mają postać identyczną jak w stojanie:

$$[L_{\sigma r}]=L_{\sigma r}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (12)$$

Macierz indukcyjności związanych ze strumieniem głównym w obrębie wirnika ma postać identyczną jak w obrębie stojana i po transformacji przyjmie postać:

$$[M_{rr}^{\alpha\beta 0}]=\frac{3}{2}M_{rr}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad (13)$$

Macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik ma postać zależną od kąta pomiędzy uzwojeniem stojana i wirnika:

$$[M_{sr}] = M_{sr}\begin{bmatrix} \cos\alpha & \cos(\alpha+120°) & \cos(\alpha+240°) \\ \cos(\alpha+240°) & \cos\alpha & \cos(\alpha+120°) \\ \cos(\alpha+120°) & \cos(\alpha+240°) & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{14}$$

Macierz indukcyjności wzajemnych stojan-wirnik przyjmuje po transformacji przyjmie postać:

$$[M_{sr}^{\alpha\beta 0}] = \frac{3}{2}M_{sr}\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Uzwojenie wirnika i stojana różnią się liczbą zwojów, liczbą faz (w silniku klatkowym liczba faz jest równa liczbie prętów wirnika) oraz sposobem rozłożenia uzwojeń w przestrzeni. Efekt rozłożenia uzwojeń w przestrzeni uwzględnia się poprzez stosowanie współczynników uzwojenia. Stąd wygodnie jest przekształcić równania wirnika w taki sposób, aby wielkości występujące w równaniach stojana i wirnika były porównywalne. Zwykle operacje taką przeprowadza się, podobnie jak w transformatorach, przez zastosowanie przekładni prądowej i napięciowej:

$$\vartheta_i = \frac{m_r}{m_s}\frac{z_r k_r}{z_s k_s} \tag{16}$$

$$\vartheta_u = \frac{z_s k_s}{z_r k_r} \tag{17}$$

Przyjęcie takich wartości przekładni prądowej wynika z dostosowania przepływu wirnika do przepływu stojana, natomiast przekładni napięciowej wynika z wyrównania sił elektromagnetycznych fazowych wirnika do fazy stojana. Równania wirnika można wówczas przedstawić jako:

$$u_r\vartheta_u = R_r\vartheta_u\frac{\vartheta_i}{\vartheta_i}i_r + \frac{d\psi_r\vartheta_u}{dt} \tag{18}$$

Wielkości wirnika należy przeliczać wg zależności:

$$u_r' = u_r \vartheta_u \tag{19}$$

$$i_r' = i_r \vartheta_i \tag{20}$$

$$R_r' = R_r \frac{\vartheta_u}{\vartheta_i} = \frac{m_s}{m_r}\left(\frac{z_s k_s}{z_r k_r}\right)^2 \tag{21}$$

$$L_r' = L_r \frac{\vartheta_u}{\vartheta_i} = \frac{m_s}{m_r}\left(\frac{z_s k_s}{z_r k_r}\right)^2 \tag{22}$$

Biorąc pod uwagę definicje współczynnika indukcyjności wzajemnej M_{sr} można wykazać, że przy założeniu sinusoidalnego rozkładu pola magnetycznego na obwodzie maszyny wartości współczynników indukcyjności wzajemnej są równe:

$$M_{ss} = \vartheta_u M_{sr} \tag{23}$$

$$M_{ss} = \frac{\vartheta_u}{\vartheta_i} M_{rr} \tag{24}$$

Wygodnie jest, po przeliczeniu wielkości strony wirnika na stronę stojana, oznaczyć wielkości występujące w równaniach jako:

$$L_\mu = \frac{3}{2} M_{ss} \tag{25}$$

$$L_s = L_{\sigma s} + L_\mu \tag{26}$$

$$L_r' = L_{\sigma r}' + L_\mu \tag{27}$$

Po wykonaniu takich podstawień otrzymamy równania opisujące model dynamiki silnika posiadający dwa uzwojenia w stojanie i dwa w wirniku.

Równania maszyny (przy pominięciu składowej zerowej) przyjmują postaćć:

$$u_{s\alpha} = R_s i_{s\alpha} + \frac{d\psi_{s\alpha}}{dt} \tag{28}$$

$$u_{s\beta} = R_s i_{s\beta} + \frac{d\psi_{s\beta}}{dt} \tag{29}$$

$$u'_{r\alpha} = R'_r i'_{r\alpha} + \frac{d\psi'_{r\alpha}}{dt} \tag{30}$$

$$u'_{r\beta} = R'_r i'_{r\beta} + \frac{d\psi'_{r\beta}}{dt} \tag{31}$$

W dalszych równaniach dla uproszczenia opuścimy znak „'" oznaczający zastosowanie przekładni prądowej i napięciowej maszyny. Zależności strumieniowo-prądowe przyjmują postać:

$$\psi_{s\alpha} = L_s i_{s\alpha} + L_\mu i_{r\alpha} \cos\alpha - L_\mu i_{r\beta} \sin\alpha \tag{32}$$

$$\psi_{s\beta} = L_s i_{s\beta} + L_\mu i_{r\alpha} \sin\alpha + L_\mu i_{r\beta} \cos\alpha \tag{33}$$

$$\psi_{r\alpha} = L_r i_{r\alpha} + L_\mu i_{s\alpha} \cos\alpha + L_\mu i_{s\beta} \sin\alpha \tag{34}$$

$$\psi_{r\beta} = L_r i_{r\beta} - L_\mu i_{s\alpha} \sin\alpha + L_\mu i_{s\beta} \cos\alpha \tag{35}$$

Po pomnożeniu równań z indeksem β przez „j" i dodaniu stronami odpowiednich równań otrzymamy:

$$\psi_{s\alpha} + j\psi_{s\beta} = L_s(i_{s\alpha} + ji_{s\beta}) + L_\mu \cos\alpha(i_{r\alpha} + ji_{r\beta}) + jL_\mu \sin\alpha(i_{r\alpha} + ji_{r\beta}) \tag{36}$$

$$\psi_{r\alpha} + j\psi_{r\beta} = L_r(i_{r\alpha} + ji_{r\beta}) + L_\mu \cos\alpha(i_{s\alpha} + ji_{s\beta}) - jL_\mu \sin\alpha(i_{s\alpha} + ji_{s\beta}) \tag{37}$$

Otrzymamy opis równań strumieniowo-prądowych w postaci zespolonej:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_\mu \underline{i}_r e^{j\alpha}$$
$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + L_\mu \underline{i}_s e^{-j\alpha}$$

Pomnożenie równań wirnika przez wielkość $e^{j\alpha}$ jest równoznaczne z transformacją równań opisujących wirnik do układu stacjonarnego, otrzymamy wówczas:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_\mu \underline{i}'_r \tag{38}$$

$$\underline{\psi}'_r = L_r \underline{i}'_r + L_\mu \underline{i}_s \tag{39}$$

$$\underline{i}'_r = \underline{i}_r e^{j\alpha} \tag{40}$$

$$\underline{\psi}'_r = \underline{\psi}_r e^{j\alpha} \tag{41}$$

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} \tag{42}$$

$$\underline{u}_r e^{j\alpha} = R_r e^{j\alpha} \underline{i}_r + e^{j\alpha} \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} \tag{43}$$

$$\underline{u}'_r = R_r \underline{i}'_r + e^{j\alpha} \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} \tag{44}$$

$$\frac{d\underline{\psi}'_r}{dt} = \frac{d(e^{j\alpha}\underline{\psi}_r)}{dt} = e^{j\alpha}\frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + \underline{\psi}_r \frac{de^{j\alpha}}{dt} \tag{45}$$

$$\frac{d\underline{\psi}'_r}{dt} = e^{j\alpha}\frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + \underline{\psi}_r j e^{j\alpha}\frac{d\alpha}{dt} \tag{46}$$

$$e^{j\alpha}\frac{d\underline{\psi}_r}{dt} = \frac{d\underline{\psi}'_r}{dt} - j\frac{d\alpha}{dt}\underline{\psi}'_r \tag{47}$$

Równana strumieniowo-prądowe maszyny asynchronicznej przyjmują postać:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_\mu \underline{i}'_r \tag{48}$$

$$\underline{\psi}'_r = L_r \underline{i}'_r + L_\mu \underline{i}_s \tag{49}$$

Ostateczna postać równań dynamiki w układzie stacjonarnym:

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} \tag{50}$$

$$\underline{u}_r^{'} = R_r \underline{i}_r^{'} + \frac{d\underline{\psi}_r^{'}}{dt} - \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{dt}}\underline{\psi}_r^{'} \tag{51}$$

Wyprowadzone równania należy uzupełnić równaniem dynamiki masy wirującej która, przy założeniu stałej wartości momentu bezładności, ma postać:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(M_e - M_0) \tag{52}$$

Gdzie J jest momentem bezwładności M_e momentem elektromagnetycznym wytworzonym w maszynie indukcyjnej a M_0 jest momentem obciążenia.

W celu uzyskania zależności na moment maszyny indukcyjnej należy wyznaczyć energię zgromadzoną w polu magnetycznym E_e oraz jej pochodną względem kata obrotu α:

$$M_e = -\frac{dE_e}{d\alpha} \tag{53}$$

Wzór na energię zgromadzoną w polu magnetycznym możemy wyprowadzić wykorzystując równania napięciowe n obwodów sprzężonych magnetycznie (k=1..n):

$$u_k = Ri_k + \frac{d\Psi_k}{dt} \tag{54}$$

Po wymnożeniu tego k- tego równania opisującego k-te uzwojenie przez wartość chwilową prądu otrzymamy zależność na moc chwilową dostarczoną do k-tego uzwojenia:

$$p_k = u_k i_k = Ri_k^2 + i_k \frac{d\Psi_k}{dt} \tag{55}$$

W równaniu występują dwa składniki (dla danej wartości kąta obrotu):

- straty mocy w uzwojeniach (w miedzi),
- moc pola magnetycznego

Energię zgromadzoną w polu magnetycznym możemy zatem obliczyć ze wzoru:

$$E_e = \sum_k \int_0^t i_k \frac{d\Psi_k}{dt} dt \tag{56}$$

$$E_e = \sum_k \int_0^t i_k d\Psi_k \tag{57}$$

Przyjmijmy, że indukcyjności własne i wzajemne są wartościami stałymi (założenie liniowości obwodu magnetycznego), wówczas:

$$\Psi_k = L_k i_k + M_{ki(k \neq i)} i_i \tag{58}$$

Dla uproszczenia analizy dalsze rozważania będą obejmowały dwa uzwojenia:

$$\Psi_1 = L_1 i_1 + M_{12} i_2 \tag{59}$$

$$\Psi_2 = L_2 i_2 + M_{12} i_1 \tag{60}$$

Energię zgromadzoną w polu magnetycznym dwóch uzwojeń sprzężonych możemy wyznaczyć z zależności:

$$E_e = \int i_1 d(L_1 i_1 + M_{12} i_2) + \int i_2 d(L_2 i_2 + M_{12} i_1) \tag{61}$$

$$E_e = L_1 \int i_1 di_1 + M_{12} \int i_1 di_2 + L_2 \int i_2 di_2 + M_{12} \int i_2 di_1 \tag{62}$$

$$E_e = L_1 \int i_1 di_1 + M_{12} \int (i_1 di_2 + i_2 di_1) + L_2 \int i_2 di_2 \tag{63}$$

$$E_e = L_1 \int i_1 di_1 + M_{12} \int d(i_1 i_2) + L_2 \int i_2 di_2 \tag{64}$$

$$E_e = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M_{12} i_1 i_2 \tag{65}$$

$$E_e = \frac{1}{2} i_1 (L_1 i_1 + M_{12} i_2) + \frac{1}{2} i_2 (L_2 i_2 + M_{12} i_1) \tag{66}$$

Energię zgromadzoną w dwóch uzwojeniach sprzężonych można wyznaczyć zatem z zależności:

$$E_e = \frac{1}{2} i_1 \psi_1 + \frac{1}{2} i_2 \psi_2 \tag{67}$$

W ogólnym przypadku dla n uzwojeń (k=1..n):

$$E_e = \frac{1}{2} \sum_k i_k \psi_k \tag{68}$$

Wzór ogólny na moment elekromagnetyczny można zatem wyrazić zależnością:

$$M_e = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha_m} \left(\sum_k i_k \psi_k \right) \tag{69}$$

W przypadku przekształcenia równań maszyny indukcyjnej do układu stacjonarnego, przy pominięciu składowej zerowej energię zgromadzoną w polu magnetycznym można wyrazić zależnością:

$$E = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sum_k i_k \psi_k = \frac{3}{4} (i_{s\alpha} \psi_{s\alpha} + i_{s\beta} \psi_{s\beta} + i_{r\alpha} \psi_{r\alpha} + i_{r\beta} \psi_{r\beta}) \tag{70}$$

W zapisie wektorowym możemy napisać:

$$E = \frac{3}{4} \sum_k i_k \psi_k = \frac{3}{4} \mathrm{Re}\{ \underline{i}_s^* \underline{\psi}_s + \underline{i}_r^* \underline{\psi}_r \} \tag{71}$$

Biorąc pod uwagę równania strumieniowo-prądowe:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_\mu \underline{i}_r e^{j\alpha} \tag{72}$$

$$\underline{\psi}_r = L_r \underline{i}_r + L_\mu \underline{i}_s e^{-j\alpha} \tag{73}$$

Otrzymamy:

$$E = \frac{3}{4} \sum_k i_k \psi_k = \frac{3}{4} \mathrm{Re}\{ \underline{i}_s (L_s \underline{i}_s^* + L_\mu \underline{i}_r^* e^{-j\alpha}) + + \underline{i}_r (L_r \underline{i}_r^* + L_\mu \underline{i}_s^* e^{j\alpha}) \} \tag{74}$$

$$E = \frac{3}{4} \sum_k i_k \psi_k = \frac{3}{4} \mathrm{Re}\{ L_s \underline{i}_s^* + L_\mu \underline{i}_s \underline{i}_r^* e^{-j\alpha} + L_r \underline{i}_r^* \underline{i}_r + L_\mu \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\alpha} \} \tag{75}$$

Jako, że zależność na moment wyznaczona jest jako pochodna po kącie obrotu, to po wykonaniu różniczkowania otrzymamy:

$$M_e = -\frac{3}{4} p \,\mathrm{Re}\{-jL_\mu \underline{i}_s \underline{i}_r^* e^{-j\alpha} + jL_\mu \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\alpha}\} \tag{76}$$

$$M_e = -\frac{3}{4} pL_\mu \,\mathrm{Re}\{j(-\underline{i}_s \underline{i}_r^* e^{-j\alpha} + \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\alpha})\} \tag{77}$$

$$M_e = -\frac{3}{4} pL_\mu \,\mathrm{Im}\{-\underline{i}_s \underline{i}_r^* e^{-j\alpha} + \underline{i}_s^* \underline{i}_r e^{j\alpha}\} \tag{78}$$

Oznaczając:

$$\underline{i}_r^{'} = \underline{i}_r e^{j\alpha} \tag{79}$$

Otrzymamy:

$$M_e = -\frac{3}{4} pL_\mu \,\mathrm{Im}\{-\underline{i}_s \underline{i}_r^{'*} + \underline{i}_s^* \underline{i}_r^{'}\} \tag{80}$$

$$\mathrm{Im}\{\underline{i}_s \underline{i}_r^{'*}\} = -\mathrm{Im}\{\underline{i}_s^* \underline{i}_r^{'}\} \tag{81}$$

$$M_e = \frac{3}{2} pL_\mu \,\mathrm{Im}\{\underline{i}_s \underline{i}_r^{'*}\} \tag{82}$$

$$M_e = \frac{3}{2} pL_\mu (i_{s\beta} i_{r\alpha}^{'} - i_{s\alpha} i_{r\beta}^{'}\} \tag{83}$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\underline{\psi}_s = L_s \underline{i}_{s_r} + L_\mu \underline{i}_{rs}^{'} \tag{84}$$

Oraz:

$$M_e = -\frac{3}{2} pL_\mu \,\mathrm{Im}\{\underline{i}_s^* \underline{i}_r^{'}\} \tag{85}$$

Otrzymamy:

$$\underline{i}_r^{'} = \frac{\underline{\psi}_s - L_s \underline{i}_s}{L_\mu} \tag{86}$$

$$M_e = \frac{3}{2} p L_\mu \operatorname{Im}\{\underline{i}_s \frac{\underline{\psi}_s - L_s \underline{i}_s}{L_\mu}\} \tag{87}$$

$$M_e = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}\{\underline{i}_s^* \underline{\psi}_s^{'} - L_s \underline{i}_s^* \underline{i}_s\} \tag{88}$$

$$M_e = \frac{3}{2} p \operatorname{Im}\{\underline{i}_s^* \underline{\psi}_s^{'}\} \tag{89}$$

$$M_e = \frac{3}{2} p (i_{s\alpha} \psi_{s\beta} - i_{s\beta} \psi_{s\alpha}) \tag{90}$$

Spis literatury:

[1] Mitew E., Maszyny Elektryczne, T1, T2, Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 2005

[2] Przyborowski W., Kamiński G.: Maszyny elektryczne, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2014.

[3] Sen P. G., Principles of electric machines and Power electronics, John Wiley & Sons, Ontario 1997

[4] Anuszczyk Jan: Maszyny elektryczne w energetyce, WNT, Warszawa 2005