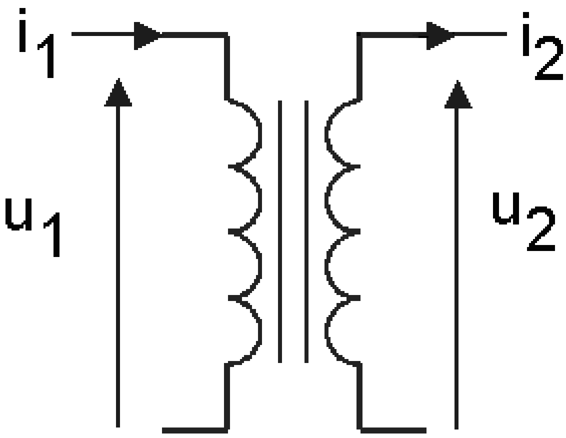
MODEL MATEMATYCZNY TRANSFORMATORA JEDNOFAZOWEGO

Transformator jednofazowy zbudowany jest z rdzenia ferromagnetycznego na którym nawinięto dwa uzwojenia (Rys. 1). Jedno nazywane jest uzwojeniem pierwotnym a drugie wtórnym .



Rys. 1 Schemat ideowy transformatora jednofazowego.

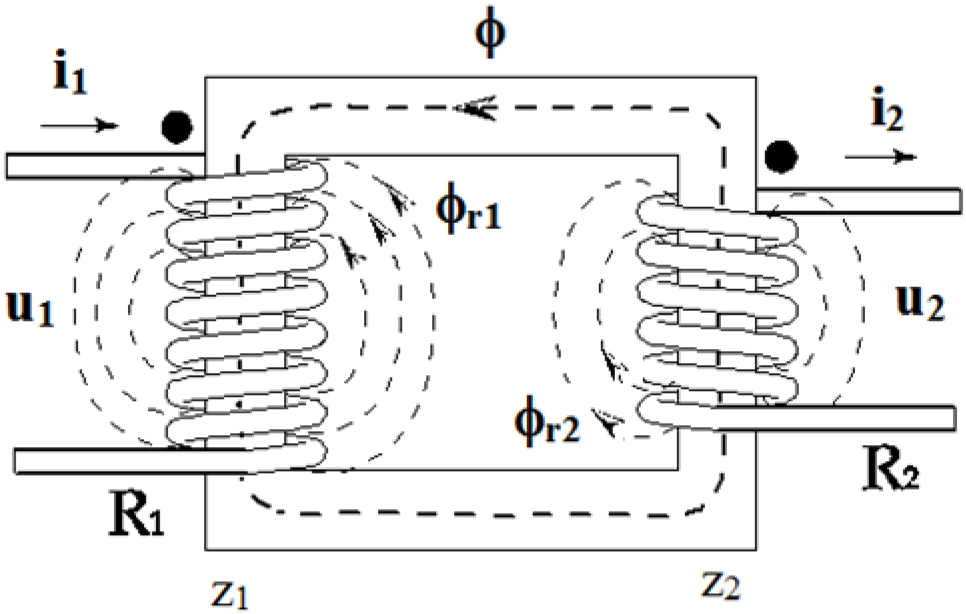
Model matematyczny transformatora opiera się na wykorzystaniu podstawowych praw teorii obwodów. Równanie Kirchhoffa dla strony pierwotnej możemy napisać w postaci:

$$u_1 = R_1 i_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \tag{1}$$

Jego postać jest wynikiem faktu, że, poza spadkiem napięcia na rezystancji uzwojenia pierwotnego, w obwodzie występuje napięcie indukowane na skutek zmian strumienia z nim skojarzonego w czasie. Równanie strony wtórnej można zapisać w postaci:

$$u_2 = \frac{d\psi_2}{dt} - R_2 i_2 \tag{2}$$

Jest to wynikiem faktu, że źródłem prądu po stronie wtórnej jest wartość napięcia indukowanego na skutek zmian strumienia skojarzonego z uzwojeniem wtórnym a wartość napięcia na zaciskach strony wtórnej będzie pomniejszone o spadek napięcia na rezystancji uzwojenia wtórnego. W równaniach tych występują strumienie skojarzone z poszczególnymi uzwojeniami. Istotą opisu jest określenie jak powiązać powyższe strumienie skojarzone z wartością indukcji wewnątrz rdzenia oraz jak uwzględnić w modelu rzeczywisty rozkład pola magnetycznego wytwarzanego przez prądy płynące przez uzwojenia. W tym celu wykorzystamy schematyczny opis zjawisk występujących w transformatorze pokazany na *Rys. 2*.



Rys. 2 Zjawiska występujące w rzeczywistym transformatorze jednofazowym

Na rysunku tym pokazano, że strumień skojarzony z uzwojeniem pierwotnym ma składnik wspólny z uzwojeniem wtórnym. Ten wspólny składnik nazywany jest strumieniem głównym ϕ. Jest to część pola magnetycznego, która obejmuje swoim zasięgiem oba uzwojenia. Poza strumieniem głównym istnieje składnik pola magnetycznego wytwarzany przez prąd płynący w uzwojeniu pierwotnym. Ta część pola magnetycznego, nazywana strumieniem rozproszenia ϕ_{r1}, kojarzy się tylko z uzwojeniem pierwotnym. Oba składniki sumują się dając całkowity strumień skojarzony z uzwojeniem pierwotnym:

$$\psi_1 = z_1(\phi + \phi_{r1}) \tag{3}$$

Podobny efekt występuje w uzwojeniu wtórnym, przy czym z faktu, że źródłem prądu po stronie wtórnej jest napięcie indukowane od części wspólnej pola magnetycznego (od strumienia głównego), więc strumień rozproszenia odejmuje się od strumienia głównego dając w efekcie wypadkowy strumień skojarzony z uzwojeniem wtórnym:

$$\psi_2 = z_2(\phi - \phi_{r2}) \tag{4}$$

W efekcie równania opisujące transformator możemy przekształcić do postaci:

$$u_1 = R_1 i_1 + z_1 \frac{d\phi}{dt} + z_1 \frac{d\phi_{r1}}{dt} \tag{5}$$

$$u_2 = z_2 \frac{d\phi}{dt} - z_2 \frac{d\phi_{r2}}{dt} - R_2 i_2 \tag{6}$$

Zwróćmy uwagę, że w obu równaniach występuje składnik wynikający tylko ze zmiany strumienia głównego w czasie. Wartość napięcia indukowanego od tego składnika pola magnetycznego występującego w uzwojeniu pierwotnym oznaczmy jako:

$$e_1 = z_1 \frac{d\phi}{dt} \tag{7}$$

Możemy więc napisać, że:

$$e_1 = z_1 \frac{d\phi}{dt} = \frac{z_1}{z_2} z_2 \frac{d\phi}{dt} \tag{8}$$

Po pomnożeniu równania strony wtórnej przez wartość wyznaczoną przez iloraz liczby zwojów strony pierwotnej do liczby zwojów strony wtórnej, nazywaną przekładnią zwojową:

$$k = \frac{z_1}{z_2} \tag{9}$$

Otrzymamy:

$$u_1 = R_1 i_1 + e_1 + z_1 \frac{d\phi_{r1}}{dt} \tag{10}$$

$$u_2 \frac{z_1}{z_2} = z_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{d\phi}{dt} - z_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{d\phi_{r2}}{dt} - \frac{z_1}{z_2} R_2 i_2 \tag{11}$$

$$u_2 \frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{d\phi}{dt} - z_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{d\phi_{r2}}{dt} - \frac{z_1}{z_2} R_2 i_2 \tag{12}$$

$$u_2 \frac{z_1}{z_2} = z_1 \frac{d\phi}{dt} - z_2 \frac{z_1}{z_2} \frac{d\phi_{r2}}{dt} - \frac{z_1}{z_2} R_2 i_2 \tag{13}$$

Biorąc pod uwagę fakt, że strumienie rozproszenia są wytwarzane przez prąd i_1 dla strony pierwotnej oraz prąd i_2 po stronie wtórnej oraz fakt, że w obu przypadkach te składniki pola magnetycznego zamykają się głównie poza rdzeniem, oba te strumienie skojarzone mogą być opisane (zgodnie z definicją indukcyjności) jako:

$$z_1 \frac{d\phi_{r1}}{dt} = L_{r1} \frac{di_1}{dt} \tag{14}$$

$$z_2 \frac{d\phi_{r2}}{dt} = L_{r2} \frac{di_2}{dt} \tag{15}$$

Równania transformatora przyjmują postać:

$$u_1 = R_1 i_1 + e_1 + L_{r1} \frac{di_1}{dt} \tag{16}$$

$$u_2 \frac{z_1}{z_2} = e_1 - \frac{z_1}{z_2} L_{r2} \frac{di_2}{dt} - \frac{z_1}{z_2} R_2 i_2 \tag{17}$$

Równania te opisują transformator w całości. Nie są jednak wygodne do analizy, stąd w praktyce używa się wielkości dla strony wtórnej określonych jako wielkości sprowadzone do strony pierwotnej. Na bazie takich przekształceń możliwe będzie odzwierciedlenie równań w postaci schematu zastępczego. Przyjęto oznaczać:

$$u_2^{'} = u_2 \frac{z_1}{z_2} = k u_2 \tag{18}$$

Tak oznaczona nowa zmienna nazywana jest napięciem sprowadzonym (do strony pierwotnej). W celu zachowania w schemacie zastępczym mocy:

$$u_2' i_2' = u_2 i_2 = k u_2 \frac{i_2}{k} \tag{19}$$

Stąd sprowadzony do strony pierwotnej prąd strony wtórnej określony jest zależnością:

$$i_2' = \frac{i_2}{k} \tag{20}$$

Zatem:

$$i_2 = k i_2' \tag{21}$$

Równanie strony pierwotnej „sprowadzone” do liczby zwojów z_{1y} przyjmie postać:

$$u_2' = e_1 - k L_{r2} \frac{d k i_2'}{dt} - k R_2 k i_2' \tag{22}$$

Z faktu tego wynika, że wartości sprowadzonych do strony pierwotnej rezystancji oraz indukcyjności rozproszenia strony wtórnej wyliczamy z zależności:

$$R_2' = k^2 R_2 \tag{23}$$

$$L_{r2}' = k^2 L_{r2} \tag{24}$$

Komplet równań przyjmuje zatem postać:

$$u_1 = R_1 i_1 + e_1 + L_{r1} \frac{di_1}{dt} \tag{25}$$

$$u_2' = e_1 - L_{r2}' \frac{di_2'}{dt} - R_2' i_2' \tag{26}$$

Dokładnej analizy wymaga wartość siły elektromotorycznej (napięcia indukowanego) od strumienia głównego. Z prawa przepływu wiadomo, że pole magnetyczne wytworzone wewnątrz rdzenia (opisane tu jako strumień główny), jest wynikiem prądów przepływających przez oba uzwojenia. Biorąc pod uwagę ten fakt możemy napisać dla krzywej obejmującej swoim zasięgiem oba uzwojenia:

$$\oint \mathbf{Hdl} = z_1 i_1 - z_2 i_2 \tag{27}$$

W modelu maszyny możemy wykorzystać ten fakt i nazwać „wypadkowy" prąd wytwarzający pole magnetyczne w rdzeniu jako prąd magnesujący i_μ:

$$z_1 i_\mu = z_1 i_1 - z_2 i_2 \tag{28}$$

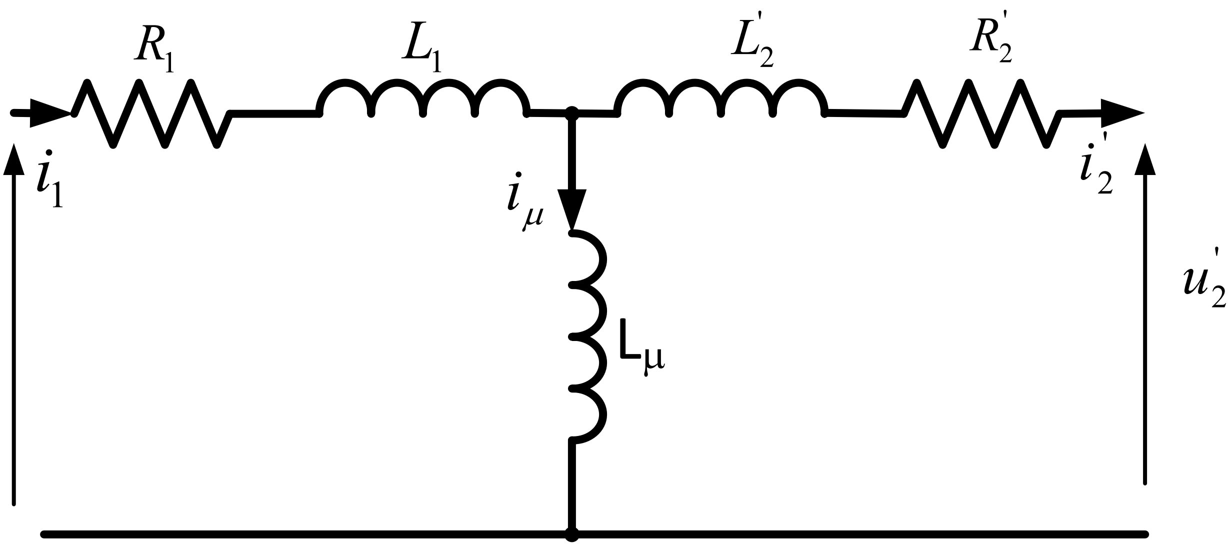
Stąd:

$$i_\mu = i_1 - \frac{z_2}{z_1} i_2 = i_1 - \frac{i_2}{k} = i_1 - i_2^{'} \tag{29}$$

Wartość siły elektromotorycznej wytwarzanej przez ten składnik prądu jest równa e_1 stąd, przy pominięciu nasycenia rdzenia możemy napisać:

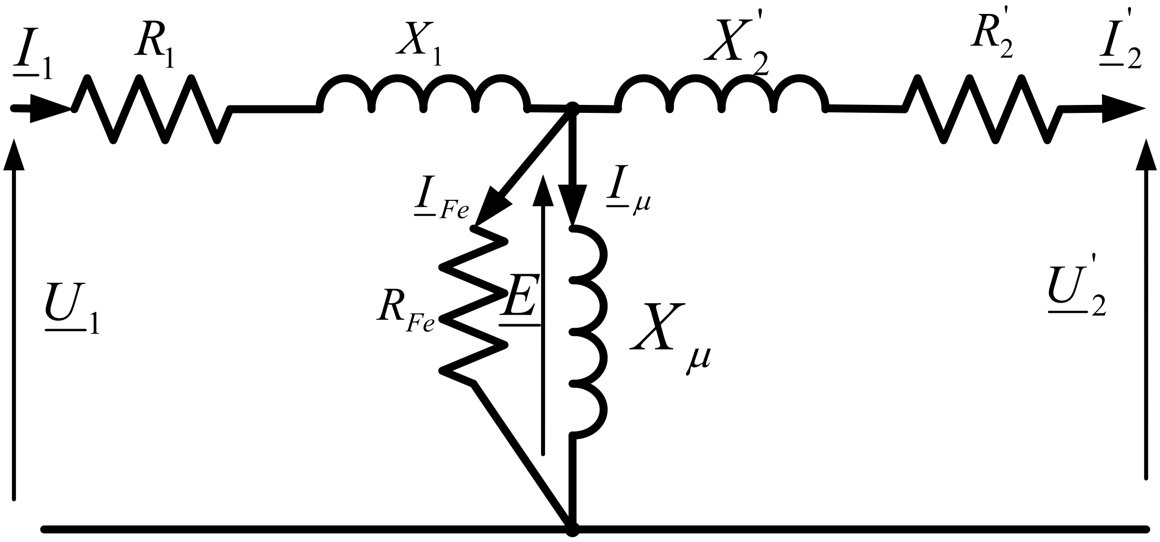
$$e_1 = L_\mu \frac{di_\mu}{dt} \tag{30}$$

Tak przekształcone równania są odpowiednikiem schematu zastępczego transformatora podanego na



Rys. 3 Schemat zastępczy transformatora wynikający z równań 25,26 i 30.

W schemat zastępczy transformatora pokazanym na ***Rys. 3*** nie są uwzględnione wszystkie zjawiska występujące w transformatorze energetycznym. Wewnątrz rdzenia ferromagnetycznego występują straty wynikające z istnienia histerezy magnetycznej (straty histerezowe) oraz wynikające z faktu, że w masie rdzenia indukują się napięcia i płyną przez rdzeń prądy, nazywane prądami wirowymi (straty na prądy wirowe). Jako, że za przetwarzanie energii na schematach zastępczych odpowiada rezystancja, w praktyczni stosowanym schemacie zastępczym dla transformatorów energetycznych wprowadza się równolegle do indukcyjności L_μ wartość rezystancji nazywanej rezystancją strat w żelazie R_{Fe}. W przypadku analizy pracy transformatora w stanie ustalonym, przy sinusoidalnie zmiennych w czasie wartościach prądów, napięć i strumieni, zamiast indukcyjności stosowane są odpowiednie wartości reaktancji oraz zespolone wartości prądów i napięć (*Rys. 4*). W takim przypadku w opisie transformatora korzystamy z odpowiednich wartości skutecznych.



Rys. 4 Schemat zastępczy transformatora.

Przyjmijmy, że strumień główny zmienia się sinusoidalnie w czasie:

$$\varphi = \Phi \sin \omega t \tag{31}$$

Wartość siły elektromotorycznej będzie równa wówczas:

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d(z\varphi)}{dt} = z\frac{d\varphi}{dt} \tag{32}$$

$$e = z\omega\Phi \cos \omega t \tag{33}$$

Jej wartość maksymalna:

$$E_{\max} = z\omega\Phi = 2\pi f z\Phi \tag{34}$$

Oraz skuteczna:

$$E = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} zf\Phi = 4.44 zf\Phi \tag{35}$$

W przypadku transformatora jednofazowego wartości skuteczne napięć indukowanych przez część wspólną strumienia sinusoidalnie zmieniającego się w czasie są równe:

$$E_1 = 4.44 z_1 f\Phi \tag{36}$$

$$E_2 = 4.44 z_2 f \Phi \tag{37}$$

$$E_2^{'} = E_1 = kE_2 = k4.44 z_2 f \Phi \tag{38}$$

Równania transformatora dla stanu ustalonego przyjmuję zatem postać:

$$\underline{U}_1 = \underline{E}_1 + jX_1 \underline{I}_1 + R_1 \underline{I}_1 \tag{39}$$

$$\underline{U}_2^{'} = \underline{E}_1 - j\underline{I}_2^{'} X_2^{'} - \underline{I}_2^{'} R_2^{'} \tag{40}$$