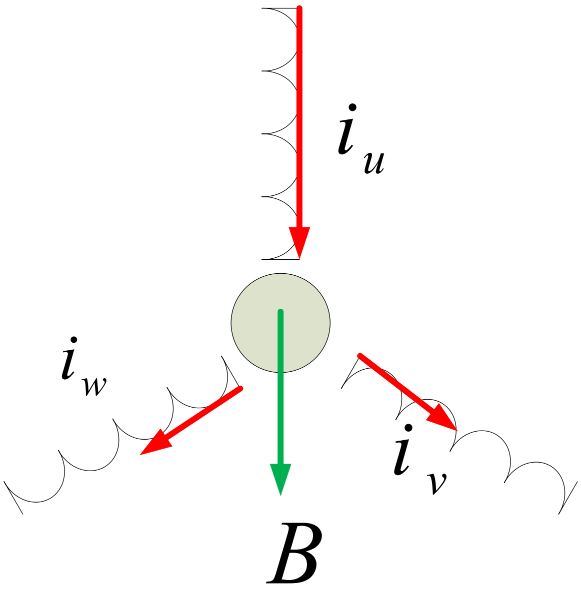
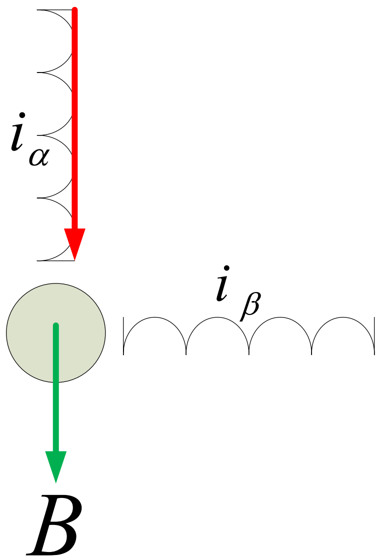
WPROWADZENIE DO DYNAMIKI MASZYN ASYNCHRONICZNYCH

Przyjmijmy, że w żłobkach na obwodzie stojana maszyny indukcyjnej nawinemy uzwojenie, które wytworzy sinusoidalny rozkład pola magnetycznego w szczelinie powietrznej. Jeli nawiniemy takie trzy uzwojenia przesunięte na obwodzie stojana o kąt 120° i zasilimy każde z nich różną wartością prądu, to wypadkowe pole magnetyczne będzie skutkiem pól wytworzonych przez prądu w kolejnych fazach. Jeśli np. we wszystkich trzech uzojeniach będą płynęły trzy prądy o identycznej wartości, to wypadkowe pole magnetyczne w szczelinie będzie się znosić. Możemy to porównać do sumy trzech wektorów przesuniętych wzgędem siebie o kąt 120°. Sytuację taką możemy rozszerzyć na dowolne wartości prądów płynących w danech chwili przez każde z uzwojeń.



Rys. 1 Wirujące pole kołowe wytworzone przez uzwojenie trójfazowe.



Rys. 2 Wirujące pole kołowe wytworzone przez uzwojenie dwufazowe.

Wypadkowe pole magnetyczne będzie wówczas sumą yrzech rozkładów sinusoidalnych, które można traktować jak trzy wektory przesunięte względem siebie o kąt 120° wymuszające wypadkowe pole magnetyczne. Wypadkowe pole może być traktowane jak wektor, którego położenie w przestrzeni jest zależne od wartości prądów w poszczególnych fazach. Wektor taki może być równoważnie wytworzony przez trzy wektory będące rzutami wektora wypadkowego na poszczególne osie uzwojeń (*Rys. 1*). Identyczn ą wartość wektora wypadkowego moiżemy uzyskać stosując dwa uzwojenia przesunięte na obwodzie maszyny o kąt elektryczny 90° (Rys. 2). Poszczególne wielkości w ukłądzie dwufazowym także możemy traktować ja rzuty wektora wypadkowego na osie dwóch uzwojeń oznaczanych zwykle literami α i β. Przeliczenie wielkości z układu trójfazowego do dwufazowego musi być także prawidłowe nie tylko w odniesieniu do wektora wypadkowego, lecz także do ich rzutów na osie uzwojeń, stąd do przeliczenia wartości np. przepływu (jako źródła pola magnetycznego) można z układu trójfazowego na równoważny dwufazowy można wykorzystać zależności:

$$w_\alpha = (w_U - w_V \sin 30° - w_W \sin 30°)k \tag{1}$$

$$w_\beta = (w_{|V} \sin 60° - w_W \sin 60°)k \tag{2}$$

Wartość współczynnika k jest dowolna i wynika z faktu, że tą samą wartość pola magnetycznego można wytworzyć przez wykorzystanie różnej liczby zwojów.

Jeśli w układzie trójfazowym suma wartości chwilowych prądów jest różna od zera, to w układzie występuje składowa zerowa, która nie wytwarza pola magnetycznego w szczelinie powietrznej, stąd możemy użyć innej wartości współczynnika proporcjonalności:

$$w_o = (w_U + w_V + w_W)kk_2 \tag{3}$$

Znacznie wygodniejszym zapisem ww. równań jest zapis macierzowy:

$$\begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \\ w_o \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k_2 & k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_U \\ w_V \\ w_W \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$[S]=k\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k_2 & k_2 & k_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

W praktyce analizy dynamiki w układach trójfazowych jako wielkości oznaczone jako w możemy użyć innych wielkości występujących w opisie układów trójfazowych. Dotyczy to prądów, napięć i strumieni skojarzonych. Przeliczenie wielkości z równoważnego układu dwufazowego do trójfazowego związane jest z użyciem macierzy odwrotnej. Wartości współczynników k i k_2 zależą od założeń dotyczących transformacji. Jeśli będziemy w identyczny sposób transformowali np. prąd i napięcie to jako kryterium doboru współczynników możemy przyjąć równość mocy chwilowej przed i po transformacji. Moc chwilową przed transformacją można przedstawić jako:

$$p=[u_U \quad u_V \quad u_W]\begin{bmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{bmatrix}=[u]^T[i] \tag{6}$$

Po transformacji (przy założeniu, że do transformacji prądów i napięć używamy takiej samej wartości k i k_2) otrzymamy:

$$p^{'}=([S][u])^T[S][i]=[u]^T[S]^T[S][i] \tag{7}$$

Dla zachowania stałości mocy musi być spełniony warunek:

$$[S]^T[S]=[1] \tag{8}$$

Zatem:

$$k^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & k_2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & k_2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ k_2 & k_2 & k_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$k^2\begin{bmatrix} 1+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 \\ -\frac{1}{2}+k_2^2 & 1+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 \\ -\frac{1}{2}+k_2^2 & -\frac{1}{2}+k_2^2 & 1+k_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Stąd otrzymamy:

$$-\frac{1}{2}+k_2^2 = 0 \quad -> \qquad k_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{11}$$

$$k^2(1+k_2^2) = 1 \quad -> \qquad k^2 = \frac{2}{3} \; -> k = \sqrt{\frac{2}{3}} \tag{12}$$

Macierz transformacji, nazywanej od autora pani Edyty Clark i Stanleya [4], transformacją Clarke'a

$$[S] = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Macierz odwrotna przyjmuje postać:

$$[S]^{-1} = [S]^T = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Inne metody wyboru wartości współczynników k i k_2 w praktyce opierają się na przyjmowaniu innych wartości przy przeliczaniu prądu a innych napięcia. Oczywistym jest, że zachowując moc chwilową współczynniki te muszą spełniać warunek:

$$k_u k_i = \frac{2}{3} \tag{15}$$

Brak zachowania warunku tego powoduje, że wartość chwilowa mocy po transformacji ulega zmianie, co należy uwzględnić w analizie mocy, strat i momentu elektromagnetycznego maszyny.

Często stosowanym współczynnikiem jest:

$$k = \frac{2}{3} \tag{16}$$

Wówczas macierze transformacji przyjmuje postać:

$$[S] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{17}$$

$$[S]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Moc chwilowa jest wówczas po transformacji zbyt mała, gdyż

$$k^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \tag{19}$$

W takim przypadku i moc chwilową po transformacji należy zwiększyć w stosunku 3/2 i obliczać według zależności:

$$p = \frac{3}{2}(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta + u_0 i_0) \tag{20}$$

Współczynnik o tej wartości jest jednak bardzo wygodny. Macierz odwrotna ma bowiem taką postać w której, przy pominięciu składowej zerowej, wartości wielkości w fazie A są równe wielkościom w fazie α.

Wielkości w osiach α i β prezentuje się zwykle w postaci wektorów przestrzennych:

$$\underline{w} = w_\alpha + j w_\beta \tag{21}$$

Często stosowaną metodą opisu jest stosowanie dodatkowej transformacji wyznaczającej od razu wektory przestrzenne w opisie liczb zespolonych. Przy transformacji zachowującej stałą moc przy przekształceniu należy wówczas pomnożyć równania we współrzędnych αβ0 przez macierz:

$$[C] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Wartość współczynnika przed macierzą transformacji wyznacza się z warunku stałości mocy:

$$[C][C]^{*T} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 1 & -j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -j & j & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

Postępowanie takie jest równoznaczne transformacji z układu współrzędnych naturalnych do postaci wektorowej poprzez stosowanie macierzy:

$$[C][S] = [T] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$a = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2\pi}{3}} \tag{25}$$

$$a^2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4\pi}{3}} = e^{-\frac{2\pi}{3}} \tag{26}$$

Macierz odwrotna przyjmuje wówczas postać:

$$[T]^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Przy stosowaniu macierzy w postaci zespolonej w takiej postaci należy pamiętać o założeniach dotyczących doboru współczynników. Całkowita moc po przekształceniu jest równa mocy przed transformacją, natomiast moc chwilową należy tu liczyć jako:

$$p = \underline{u}\underline{i}^* + \underline{u}^*\underline{i} + u_0 i_0 \tag{28}$$

Częściej stosowaną postacią macierzy transformacyjnej o współczynnikach zespolonych stosowanej w praktyce jest:

$$[T'] = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Stosowanie takiej postaci macierzy do układu trójfazowego bez składowej zerowej sprowadza przekształcenie trzech wielkości fazowych do jednego wektora przestrzennego.

Przekształcenie prądów fazowych daje wówczas następującą postać po przekształceniu:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{i}} \\ \underline{\mathbf{i}}^* \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_U \\ i_V \\ i_W \end{bmatrix} \tag{30}$$

gdzie:

$$\underline{\mathbf{i}} = i_\alpha + j i_\beta \tag{31}$$

Macierz odwrotna przyjmuje postać:

$$[T']^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Prąd fazy A można (przy pominięciu składowej zerowej) wyznaczyć zatem ze wzoru:

$$i_A = \frac{1}{2}(\underline{\mathrm{i}} + \underline{\mathrm{i}}^*) = i_\alpha \tag{33}$$

Wartość mocy po transformacji będzie zaniżona i wówczas przy pominięciu składowej zerowej moc w układzie należy liczyć jako:

$$p = \frac{3}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{ui}^*\} = \frac{3}{2}(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta) \tag{34}$$

Do tej pory opisywano transformacje wielkości typu prąd, napięcie, strumień układu trójfazowego do układu dwufazowego. W praktyce należy w jaki sposób zastępuje przekształcenie równań opisujących stan dynamiczny w układach trójfazowych. Równania układu trójfazowego w układzie trójfazowym można przedstawić w postaci:

$$u_A = Ri_A + \frac{d\psi_A}{dt} \tag{35}$$

$$u_B = Ri_B + \frac{d\psi_B}{dt} \tag{36}$$

$$u_C = Ri_C + \frac{d\psi_C}{dt} \tag{37}$$

Równania te można przedstawić w postaci macierzowej:

$$[u] = [R][i] + \frac{d[\Psi]}{dt} \tag{38}$$

Zastosowanie transformacji S sprowadza się do pomnożenia powyższego równania przez macierz S otrzymując:

$$[S][u] = [S][R][S]^{-1}[S][i] + \frac{d[S][\psi_\alpha]}{dt} \tag{39}$$

Przy założeniu jednakowych wartości rezystancji w każdej fazie otrzymamy:

$$[u_{\alpha\beta 0}] = [R][i_{\alpha\beta 0}] + \frac{d[\psi_{\alpha\beta 0}]}{dt} \tag{40}$$

lub:

$$u_\alpha = Ri_\alpha + \frac{d\psi_\alpha}{dt} \tag{41}$$

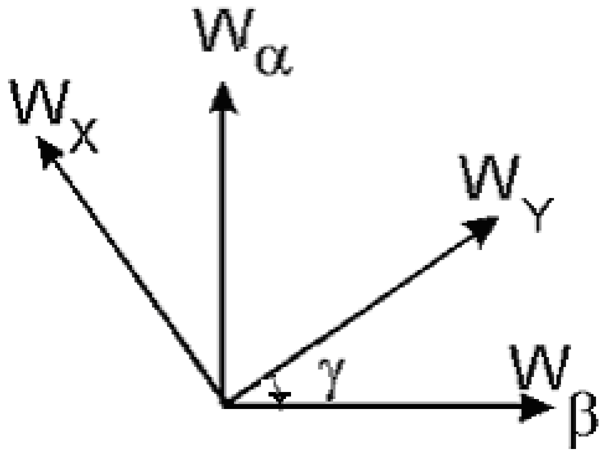
$$u_\beta = Ri_\beta + \frac{d\psi_\beta}{dt} \tag{42}$$

$$u_o = Ri_o + \frac{d\psi_o}{dt} \tag{43}$$

Jeśli pomijamy składową zerową prądu to opis matematyczny sprowadza się do dwóch pierwszych równań. Równania te można traktować jak jedno równanie przy wykorzystaniu zmiennych zespolonych w postaci:

$$\underline{u} = R\underline{i} + \frac{d\underline{\psi}}{dt} \tag{44}$$

Bardzo często dokonuje się transformacji tych równań do innych układów współrzędnych, przesuniętych względem układu stacjonarnego o pewien kąt:



Rys. 3 Przeliczenie wielkości do układu innego układu współrzędnych.

Transformacji do układu xy dokonuje się w sposób następujący:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma \\ -\sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{bmatrix} \tag{45}$$

Transformacja odwrotna:

$$\begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \end{bmatrix} \tag{46}$$

Przy uwzględnieniu składowej zerowej otrzymamy:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_\alpha \\ w_\beta \\ w_o \end{bmatrix} \tag{47}$$

Przy transformacji do układu xy kąt γ może się zmieniać w czasie, stąd równania maszyny w układzie xy będą miały postać:

$$u_x = u_\alpha \cos\gamma + u_\beta \sin\gamma$$

$$u_y = -u_\alpha \sin\gamma + u_\beta \cos\gamma \tag{48}$$

Po pomnożeniu przez j drugiego równania i dodaniu stronami otrzymamy:

$$u_x + ju_y = u_\alpha \cos\gamma + u_\beta \sin\gamma -$$

$$- ju_\alpha \sin\gamma + ju_\beta \cos\gamma \tag{49}$$

$$\underline{u}_{xy} = (u_\alpha + ju_\beta)\cos\gamma - j(u_\alpha + ju_\beta)\sin\gamma$$

$$\underline{u}_{xy} = \underline{u}(\cos\gamma - j\sin\gamma)$$

$$\underline{u}_{xy} = \underline{u}e^{-j\gamma} \tag{50}$$

Przekształcenie do drugiego układu współrzędnych jest zatem równoznaczne przez pomnożenie równań w postaci zespolonej przez $e^{j\gamma}$:

$$\underline{u}e^{-j\gamma} = R\underline{i}e^{-j\gamma} + e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} \tag{51}$$

Otrzymamy:

$$\underline{u}_{xy} = R\underline{i}_{xy} + e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} \tag{52}$$

Czynnik:

$$e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\underline{\psi}}}{dt} \tag{53}$$

nie daje się łatwo przedstawić jako pochodna strumienia w układzie xy, gdyż kąt γ w ogólnym przypadku może być funkcją czasu. Możemy wyznaczyć pochodną strumienie w układzie xy, otrzymamy:

$$\frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} = \frac{d(e^{-j\gamma}\underline{\psi})}{dt} = e^{-j\gamma}\frac{d\underline{\psi}}{dt} - j\frac{d\gamma}{dt}e^{-j\gamma}\underline{\psi} \tag{54}$$

Otrzymamy zatem:

$$e^{j\gamma}\frac{d\underline{\psi}}{dt} = \frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} + j\frac{d\gamma}{dt}\underline{\psi_{dq}} \tag{55}$$

$$\underline{u}_{xy} = R\underline{i}_{xy} + \frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} + j\frac{d\gamma}{dt}\underline{\psi_{xy}} \tag{56}$$

W przypadku ogólnym oś xy wiruje z prędkością:

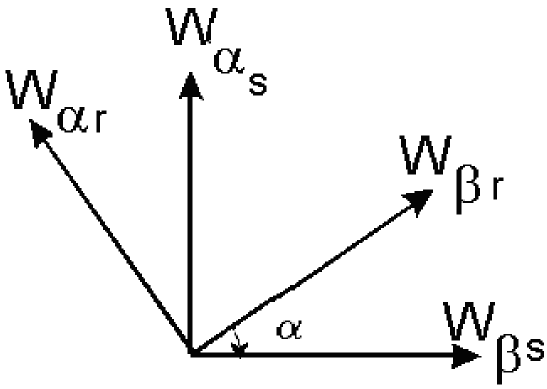
$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega_x \tag{57}$$

Stąd ostateczna postać równania w układzie wirującym ma postać:

$$\underline{u}_{xy} = R\underline{i}_{xy} + \frac{d\underline{\psi}_{xy}}{dt} + j\omega_x\underline{\psi}_{xy} \tag{58}$$

W przypadku, gdy przeliczamy wielkości do układu wirującego w prędkością wirnika, to przekształcenie takie nazywa się w literaturze transformacją Parka-Goriewa (dq), natomiast gdy jest to prędkość wirowania pola magnetycznego to jest to transformacja Krona (xy) [4].

W maszynach elektrycznych oprócz uzwojeń stacjonarnych (stojan) występują także uzwojenia wirujące umieszczone w wirnikach maszyn. Rozpatrzmy zatem sytuację, w której występują uzwojenia dwufazowe zarówno w stojanie jak i wirniku maszyny Uzwojenia wirnika są przesunięte względem stojana o kąt α:



Rys. 4 Przeliczanie wielkości z wirującego wirnika do układu stacjonarnego.

W opisie matematycznym wygodnie jest przedstawić równania wirnika widziane z od strony nieruchomych uzwojeń stojana. Przeliczenie wielkości wirnika do obwodu stojana odbywa się zatem podobnie jak w przypadku różnych układów współrzędnych, zgodnie z Rys. 4 :

$$\begin{bmatrix} w'_{r\alpha} \\ w'_{r\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{r\alpha} \\ w_{r\beta} \end{bmatrix} \tag{59}$$

Jedyna różnica jaka występuje w powyższych zależnościach dotyczy znaku przy funkcjach *sin* w obu wierszach równania co wynika z założeń dotyczących kierunku wirowania wirnika względem stojana. Zgodnie z normami kierunek dodatni wyznaczony jest przez kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara, sąt znak „-„ w równaniach.

Przeliczenie obwodu wirującego do układu stojana prowadzi zatem do równania:

$$\underline{u}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} - j\frac{d\alpha}{dt}\underline{\psi}_r \tag{60}$$

Szybkość zmiany kąta pomiędzy uzwojeniami stojana i wirnika związana jest z prędkością kątową:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega \tag{61}$$

Łącząc transformacje wirnika do układu stacjonarnego i transformacje do dowolnego układu wirującego otrzymamy znaną z literatury postać równań opisujących maszyny trójfazowe w dowolnym układzie współrzędnych wirujących:

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d\underline{\psi}_s}{dt} + j\omega_x \underline{\psi}_s$$
$$\underline{u}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d\underline{\psi}_r}{dt} + j(\omega_x - \omega)\underline{\psi}_r \tag{62}$$

Spis literatury:

[1] Mitew E., Maszyny Elektryczne, T1, T2, Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 2005

[2] Przyborowski W., Kamiński G.: Maszyny elektryczne, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2014.

[3] Sen P. G., Principles of electric machines and Power electronics, John Wiley & Sons, Ontario 1997

[4] Anuszczyk Jan: Maszyny elektryczne w energetyce, WNT, Warszawa 2005