Równania dynamiki maszyn prądu stałego w jednostkach względnych

Jako podstawę analizy przyjmijmy równania obwodu twornika:

$$u_t = (R_t + R_d) i_t + e_t + L_t \frac{di_t}{dt}$$

obwodu wzbudzenia:

$$u_w = (R_w + R_{wd}) i_w + L_w \frac{di_w}{dt}$$

wartość siły elektromotorycznej wynikającej z obrotów wirnika:

$$e_t = k\Phi\omega$$

moment wytworzony w maszynie:

$$M_e = k\Phi i_t$$

Bardzo wygodny jest zapis równań w jednostkach względnych. Jako wielkości odniesienia przyjmijmy następujące wielkości:

$U_0 = U_{tn}$ - znamionowe napięcie twornika

$I_0 = I_{tn}$ - znamionowy prąd twornika

$k\phi_0 = k\phi_n$ - znamionowy strumień

$$\omega_0 = \frac{U_{tn}}{k\phi_n} \qquad k\phi_n = \frac{U_{tn}}{\omega_0}$$

Dla silnika obcowzbudnego:

$$k\phi_n = \frac{U_{tn} - R_t I_{tn}}{\omega_n}$$

Wielkość odniesienia dla prędkości jest równa prędkości idealnego biegu jałowego dla silnika obcowzbudnego. Oczywiście dla innych typów maszyn przyjmowana jest wielkość wyznaczona według wzoru podanego wyżej. Przy takim wyborze wielkości odniesienia otrzymamy:

$$\frac{u_t}{U_{tn}} = \frac{R_t + R_d}{U_{tn}} I_{tn} \frac{i_t}{I_{tn}} + \frac{L_t}{U_{tn}} I_{tn} \frac{d\,\dfrac{i_t}{I_{tn}}}{dt} + \frac{k\phi}{U_{tn}} \omega_0 \frac{\omega}{\omega_0}$$

Oznaczając:

$$u = \frac{u_t}{U_{tn}} \quad R_n = \frac{U_{tn}}{I_{tn}} \quad r = \frac{R_t + R_d}{R_n} \quad l = \frac{L_t}{R_n}$$

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad \varphi = \frac{k\phi}{k\phi_n}$$

Otrzymamy równanie twornika w postaci:

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi\nu$$

Taka postać równania jest praktyczna, gdyż wszystkie wielkości występujące w równaniach, w zakresie od biegu jałowego do warunków znamionowych, mają wartości z zakresu 0÷1. Parametry występujące w równaniach jako mają wielkości niemianowane, a porównanie różnych maszyn ze sobą jest łatwiejsze. Równanie obwodu wzbudzenia w wielkościach względnych przyjmuje postać:

$$\frac{u_w}{U_{wn}} = \frac{R_w + R_{wd}}{U_{wn}} I_{wn} \frac{i_w}{I_{wn}} + \frac{L_w}{U_{wn}} I_{wn} \frac{d\,\dfrac{i_w}{I_{wn}}}{dt}$$

$$u_m = r_w i_m + l_w \frac{di_m}{dt}$$

$$R_{w0} = \frac{U_{wn}}{I_{wn}} \quad r_w = \frac{R_w + R_{wd}}{R_{wn}} \quad l_w = \frac{L_w}{R_{wn}}$$

Równanie momentu przyjmuje postać:

$$m = \varphi i$$

Jednym z podstawowych komplikacji analiz maszyn elektrycznych jest fakt nieliniowej zależności strumienia od prądu magnesującego, stąd dla przybliżonego uwzględnienia zjawisk nasyceniowych można w przybliżeniu aproksymować charakterystykę magnesowania w wielkościach względnych. Pomijając zjawisko histerezy magnetycznej można stosować wzór aproksymujący w postaci:

$$\varphi = \frac{i_m}{a|i_m| + (1-a)}$$

Przy czym dla:

$$a \approx 0.55 \div 0.65$$

Oczywistym jest, że nie jest to jedyne przybliżenie charakterystyki magnesowania, można np.. stosować zależność:

$$\varphi = a_0 \arctan(a_1 i) + a_2 i$$

wielomiany lub inne funkcje aproksymujące charakterystyki magnesowania:

$$B = \frac{aH}{1+bH}$$ a≅0.00273; b≅0.00149

$$B = \frac{a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + \ldots}{1 + b_1 H + b_2 H^2 + \ldots}$$

$$H = [k_1 \exp(k_2 B^2) + k_3]B$$

Należy przy tym pamiętać, że jest to jedynie przybliżenie zjawisk występujących w praktyce.

Równanie dynamiki mechanicznej:

$$J \frac{d\omega}{dt} = M_e - M_0$$

W jednostkach względnych otrzymamy:

$$\frac{J}{k\phi_n I_{tn}} \omega_0 \frac{d \frac{\omega}{\omega_0}}{dt} = m_e - m_0$$

$$j \frac{d\nu}{dt} = m - m_0$$

gdzie:

$$j = \frac{JU_{tn}}{k\phi_n^2 I_{tn}}$$

Silnik obcowzbudny

Dla tego typu maszyny wyprowadzone wyżej równania odpowiadają bez żadnych modyfikacji

$$u_m = r_w i_m + l_w \frac{di_m}{dt}$$

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi \nu$$

$$m = \varphi i$$

Dla znamionowego prądu wzbudzenia, lub maszyn o magnesach trwałych

$$\varphi = 1 \qquad m = i$$

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \nu$$

W stanie ustalonym, przy stałej prędkości kątowej:

$$\nu = \frac{u - ri}{\varphi}$$

Przy znamionowym prądzie wzbudzenia:

$$\nu = u - ri$$

$$\nu = u - rm$$

Silnik szeregowy

W silniku szeregowym:

$$i_m = i$$

stąd w tym przypadku nie ma odrębnego równania dla obwodu wzbudzenia. Równanie obwodu twornika ma postać:

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi \nu$$

Należy przy tym uwzględnić:

$$\varphi = \frac{i}{a|i| + (1-a)}$$

$$r = \frac{R_t + R_{wsz} + R_d}{R_n} \qquad l_w = \frac{L_t + L_w}{R_n}$$

W stanie ustalonym, podobnie jak w maszynie obcowzbudnej::

$$\nu = \frac{u - ri}{\varphi}$$

Wartość strumienia zależy tu od prądu twornika, stąd z zakresie liniowej części charakterystyki magnesowania możemy napisać:

$$\varphi = i$$

$$\nu = \frac{u - ri}{i}$$

$$\nu = \frac{u}{i} - r$$

$$m = i^2$$

Przy takich założeniach charakterystyka mechaniczna ma zatem kształt hiperboli.

Silnik bocznikowy

W silniku bocznikowym napięcie zasilające obwód wzbudzenia jest równe napięciu twornika, stąd:

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi\nu \qquad u = r_w i_m + l_w \frac{di_m}{dt}$$

$$i_0 = i_m + i$$

Przy czym wartość prądu i_o jest prądem pobieranym ze źródła napięcia stałego. W tym przypadku zmiana napięcia zasilającego zmienia także wartość prądu w obwodzie wzbudzenia. Konsekwencją jest tu brak możliwości regulacji prędkości obrotowej poprzez zmianę napięcia twornika..

Uwaga!

Dostępny jest program symulacyjny dynamiki maszyn prądu stałego: SPS_REL.EXE. W programie wykorzystano równania maszyn prądu stałego w jednostkach względnych. Kolejne zmienne oznaczają:

i – prąd twornika
w – prędkość względna
iw – prąd wzbudzenia
e – siła elektromotoryczna
u – napięcia zasilania
fi – strumień
ma – aktywny moment obciążenia
mb – bierny moment obciążenia
m – moment maszyny
a – wartość współczynnika funkcji aproksymującej charakterystykę magnesowania
r – wartość względna rezystancji uzwojenia twornika
l - wartość względna indukcyjności uzwojenia twornika
rw – wartość względna rezystancji uzwojenia wzbudzenia
lw - wartość względna indukcyjności uzwojenia wzbudzenia
j –wartość względna momentu bezwładności maszyny

Program uwzględnia następujące typu maszyn:

1 – silnik obcowzbudny
2 – silnik szeregowy z uwzględnieniem charakterystyki magnesowania
3 – silnik bocznikowy, obwód magnetyczny liniowy
4 – silnik bocznikowy z uwzględnieniem charakterystyki magnesowania

Wartości parametrów modeli matematycznych można oszacować na podstawie danych katalogowych:

Indukcyjność obwodu twornika maszyny obcowzbudnej:

$$L_t \approx k_t \frac{2\pi U_n}{pI_n\omega_n}[H]$$

W wartościach względnych:

$$l \approx k_t \frac{2\pi}{p\omega_n}$$

k_t = 0.09 – silniki z biegunami dodatkowymi
k_t = 0.03 – silniki z biegunami dodatkowymi i uzwojeniem kompensacyjnym
k_t = 0.003 – magnesy trwałe i wirnik cylindryczny
k_t = 0.0007 – magnesy trwałe i wirnik tarczowy

Rezystancja twornika:

$$R_t \approx 0.5(1-\eta)\frac{U_n}{I_n}[\Omega]$$

W wartościach względnych:

$$r_t \approx 0.5(1-\eta)$$

Wartość stałej czasowej obwodu twornika dla maszyn małej i średniej mocy:

$$T_t = \frac{L_t}{R_t} \approx 30 \div 80ms$$

Rezystancję uzwojenia wzbudzenia można szacować na podstawie strat, przy czym straty w obwodzie wzbudzenia:

0.5% P_n - silnik szeregowy
1% P_n- silnik bocznikowy (obcowzbudny)

W literaturze spotyka się zależność na szacowaną wartość indukcyjności obwodu wzbudzenia w postaci:

$$L_w \approx 1.2 z_w \frac{2\pi U_n}{pI_{tn}\omega_n}\frac{a}{N}$$

z_w –liczba zwojów uzwojenia wzbudzenia
N –liczba zwojów uzwojenia twornika
a – liczba par gałęzi równoległych

$$l_w \approx 1.2 z_w \frac{2\pi}{p\omega_n}\frac{a}{N}$$

Stała czasowa obwodu wzbudzenia:

$$T_w = \frac{L_w}{R_w} \approx 0.3 \div 4.0s$$

T_w[s]	Moc rzędu [kW]:
0.3÷0.5	10
0.8÷1.5	100
2.0 ÷3.0	1000
3.4÷4.0	3000÷5000