Zasada działania silnika i prądnicy prądu stałego:

Siła działająca na przewodnik z prądem w polu magnetycznym:

$$F = Bi_t l$$

b- wartość chwilowa indukcji

i_t – wartość prądu chwilowa prądu

l – długość przewodnika

Moment elektromagnetyczny jest równy:

$$M_e = Fr = F\frac{D}{2}$$

M_e – moment pojedynczego pręta

r – promień wirnika

D – średnica wirnika

$$M_e = Bi_t\frac{Dl}{2}$$

dla z zwojów połączonych szeregowo:

$$M_e = Bi_t\frac{Dl}{2}z$$

Strumień magnetyczny:

$$\phi = BS = BDl$$

Stąd:

$$M_e = \frac{1}{2}zi_t\phi = k\phi i_t$$

$$k = \frac{1}{2} z$$

Siła elektromotoryczna pojedynczego pręta:

$$e_t = Blv$$

v –wartość chwilowa prędkości

$$v = \omega r = \omega \frac{D}{2}$$

ω - prędkość kątowa

$$e_t = Bl\omega \frac{D}{2}$$

Dla z zwojów połączonych szeregowo:

$$e_t = bl\omega \frac{D}{2} z = \frac{1}{2} z\phi\omega = k\phi\omega$$

Równanie obwodu twornika, zgodnie z prawami Kirchhoffa:

$$u_t = R_t i_t + e_t + L_t \frac{di_t}{dt}$$

Równanie obwodu wzbudzenia:

$$u_w = R_w i_w + L_w \frac{di_w}{dt}$$

W stanie ustalonym:

$$U_w = R_w I_w$$

$$U_t = R_t I_t + E_t$$

$$U_t = R_t I_t + k\phi\omega$$

$$\omega = \frac{U_t - R_t I_t}{k\phi}$$

Prądnica w stanach ustalonych:

$$U_t = E_t - R_t I_t$$

$$\boldsymbol{U_t = k\Phi\omega - R_t I_t}$$

W nowszej literaturze występują równoznaczne oznaczenia związane z modelami maszyny uogólnionej:

$$u_q = u_t \qquad \psi_d = k\Phi \qquad i_q = i_t$$

$$M_e = \psi_d i_q$$

$$u_q = R_q i_q + \omega\psi_d + L_q \frac{di_q}{dt}$$

$$u_q = R_q i_q + \omega\psi_d + \frac{d\psi_q}{dt}$$

Dla maszyny prądu stałego, wykorzystywanej jako element automatyki, wyznaczmy wybrane transmitancje. Sygnałem wejściowym może być np. napięcie twornika (dla maszyny obcowzbudnej) a sygnałem wyjściowym prędkość obrotowa. Korzystając z równań wyprowadzonych wyżej otrzymamy równanie obwodu elektrycznego:

$$u_t = R_t i_t + k\phi\omega + L_t \frac{di_t}{dt}$$

Równanie dynamiki:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_e - M_o = k\phi i_t$$

Przyjmijmy, że moment obciążenia jest równy $M_o=0$, otrzymamy:

$$J\frac{d\omega}{dt} = k\phi i_t \qquad i_t = \frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt}$$

$$u_t = R_t \frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt} + k\phi\omega + L_t \frac{d}{dt}\left(\frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt}\right)$$

$$u_t = R_t \frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt} + k\phi\omega + L_t \frac{J}{k\phi}\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

Dokonując transformaty Laplace'a (przy założeniu zerowych warunków początkowych) otrzymamy:

$$u_t = R_t \frac{J}{k\phi} s\omega(s) + k\phi\omega(s) + L_t \frac{J}{k\phi} s^2\omega(s)$$

Transmitancję wyznaczamy zatem z zależności:

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{u_t(s)}=\frac{1}{L_t\frac{J}{k\phi}s^2+R_t\frac{J}{k\phi}s+k\phi}$$

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{u_t(s)}=\frac{1}{L_t\frac{J}{k\phi}s^2+R_t\frac{J}{k\phi}s+k\phi}$$

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{u_t(s)}=\frac{1/k\phi}{L_t\frac{J}{k\phi^2}s^2+R_t\frac{J}{k\phi^2}s+1}$$

Oznaczmy:

$T_e=\frac{L_t}{R_t}$ – elektromagnetyczna stała czasowa

$T_M=\frac{JR_t}{k\phi^2}$ elektromechaniczna stała czasowa

$k=\frac{1}{k\phi}$ - wzmocnienie

Otrzymamy:

$$G(s)=\frac{k}{T_eT_Ms^2+T_Ms+1}$$

Przebieg wartości prędkości kątowej przy skokowej zmianie napięcia zależy od biegunów transmitancji. Bieguny transmitancji mają postać zależną od wartości:

$$\Delta = T_M^2 - 4T_M T_e$$

Jeśli $\Delta \geq 0$ bieguny mają tylko część rzeczywistą postaci:

$$s_{1,2} = \frac{-T_M \pm \sqrt{\Delta}}{2T_M T_e}$$

Przebieg prędkości ma wówczas charakter aperiodyczny, natomiast w przypadku gdy:

$$\Delta = T_M^2 - 4T_M T_e < 0$$

Przebieg ma charakter oscylacyjny tłumiony. Bieguny przyjmują wartość:

$$s_{1,2} = \frac{-T_M \pm j\sqrt{\Delta}}{2T_M T_e}$$

Z warunku tego wynika, że oscylacyjna odpowiedź prędkości występuje, gdy spełniona jest zależność:

$$T_M < 4T_e$$