# Maszyny prądy stałego – dynamika

Dla maszyny prądu stałego, wykorzystywanej jako element automatyki, wyznaczmy wybrane transmitancje. Sygnałem wejściowym może być np. napięcie twornika (dla maszyny obcowzbudnej) a sygnałem wyjściowym prędkość obrotowa. Równanie Kirchhoffa dla obwodu twornika możemy napisać w podstaci:

$$u_t = R_t i_t + k\phi\omega + L_t \frac{di_t}{dt} \tag{1}$$

Równanie dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_e - M_o = k\phi i_t - M_o \tag{2}$$

Przyjmijmy, że moment obciążenia jest równy zeru, otrzymamy:

$$J\frac{d\omega}{dt} = k\phi i_t \tag{3}$$

Wartość chwilowa prądu jest zatem równa:

$$i_t = \frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt} \tag{4}$$

Po wstawieniu tego równania (4) do (1) otrzymamy:

$$u_t = R_t \frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt} + k\phi\omega + L_t \frac{d}{dt}\left(\frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt}\right) \tag{5}$$

$$u_t = R_t \frac{J}{k\phi}\frac{d\omega}{dt} + k\phi\omega + L_t \frac{J}{k\phi}\frac{d^2\omega}{dt^2} \tag{6}$$

Dokonując transformaty Laplace'a (przy założeniu zerowych warunków początkowych) otrzymamy:

$$u_t(s) = R_t \frac{J}{k\phi} s\omega(s) + k\phi\omega(s) + L_t \frac{J}{k\phi} s^2\omega(s) \tag{7}$$

Transmitancję wyznaczamy zatem z zależności:

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{u_t(s)}=\frac{1}{L_t\frac{J}{k\phi}s^2+R_t\frac{J}{k\phi}s+k\phi} \tag{8}$$

Po przekształceniach:

$$G(s)=\frac{\omega(s)}{u_t(s)}=\frac{1/k\phi}{L_t\frac{J}{k\phi^2}s^2+R_t\frac{J}{k\phi^2}s+1} \tag{9}$$

Jeśli oznaczymy stałą czasową obwodu twornika (elektromagnetyczna stała czasowa) jako $T_e$:

$$T_e=\frac{L_t}{R_t} \tag{10}$$

$T_M$ jest elektromechaniczną stałą czasową

$$T_M=\frac{JR_t}{k\phi^2} \tag{11}$$

Wzmocnienie oznaczmy literą k:

$$k=\frac{1}{k\phi} \tag{12}$$

Transmitancję maszyny obcowzbudnej prądu stałego możemy przedstawić w postaci::

$$G(s)=\frac{k}{T_eT_Ms^2+T_Ms+1} \tag{13}$$

Przebieg wartości prędkości kątowej przy skokowej zmianie napięcia zależy od biegunów transmitancji. Wartość biegunów transmitancji ma postać zależną od wartości:

$$\varDelta=T_M^2-4T_MT_e \tag{14}$$

Jeśli $\Delta \geq 0$ to bieguny mają tylko część rzeczywistą o wartościach:

$$s_{1,2} = \frac{-T_M \pm \sqrt{\varDelta}}{2T_M T_e} \tag{15}$$

Przebieg prędkości ma wówczas charakter aperiodyczny, natomiast w przypadku gdy:

$$\varDelta = T_M^2 - 4T_M T_e < 0 \tag{16}$$

przebieg prędkości ma charakter oscylacyjny tłumiony. Wartość biegunów można wyznaczyć wg. zależności:

$$s_{1,2} = \frac{-T_M \pm j\sqrt{\varDelta}}{2T_M T_e} \tag{17}$$

Oscylacyjna przebieg prędkości kątowej występuje, gdy spełniona jest zależność:

$$T_M < 4T_e \tag{18}$$

Bardzo często równania dynamiki maszyn prądu stałego wygodnie jest przedstawić w wielkościach względnych. Jako podstawę analizy przyjmijmy równania obwodu twornika:

$$u_t = (R_t + R_d)i_t + e_t + L_t \frac{di_t}{dt} \tag{19}$$

I obwodu wzbudzenia:

$$u_w = (R_w + R_{wd})i_w + L_w \frac{di_w}{dt} \tag{20}$$

Wartość siły elektromotorycznej wynikającej z obrotów wirnika:

$$e_t = k\Phi\omega \tag{21}$$

Moment elektromagnetyczny wytworzony w maszynie:

$$M_e = k\Phi i_t \tag{22}$$

Jako wielkości odniesienia przyjmijmy następujące wielkości:

- znamionowe napięcie twornika $U_o = U_n$
- znamionowy prąd twornika $I_o = I_{tn}$

- znamionową wartość strumienia $k\phi_o = k\phi_n$

$$\omega_0 = \frac{U_{tn}}{k\phi_n} \tag{23}$$

Wielkość odniesienia dla prędkości jest równa prędkości idealnego biegu jałowego dla silnika obcowzbudnego:

$$k\phi_n = \frac{U_{tn}}{\omega_0} \tag{24}$$

Oczywiście dla innych typów maszyn przyjmowana jest wielkość wyznaczona według wzoru:

$$k\phi_n = \frac{U_{tn} - R_t I_{tn}}{\omega_n}$$

Przy takim wyborze wielkości odniesienia otrzymamy:

$$\frac{u_t}{U_{tn}} = \frac{R_t + R_d}{U_{tn}} I_{tn} \frac{i_t}{I_{tn}} + \frac{L_t}{U_{tn}} I_{tn} \frac{d\,\dfrac{i_t}{I_{tn}}}{dt} + \frac{k\phi}{U_{tn}} \omega_0 \frac{\omega}{\omega_0} \tag{25}$$

Oznaczając poszczególne wielkości jako:

$$u = \frac{u_t}{U_{tn}} \tag{26}$$

$$R_n = \frac{U_{tn}}{I_{tn}} \tag{27}$$

$$r = \frac{R_t + R_d}{R_n} \tag{28}$$

$$l = \frac{L_t}{R_n} \tag{29}$$

$$\nu = \frac{\omega}{\omega_0} \tag{30}$$

$$\varphi = \frac{k\phi}{k\phi_n} \tag{31}$$

Otrzymamy równanie twornika w postaci:

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi\nu$$

Taka postać równania jest praktyczna, gdyż wszystkie wielkości występujące w równaniach, w zakresie od biegu jałowego do warunków znamionowych, mają wartości z zakresu 0÷1. Parametry występujące w równaniach mają wielkości niemianowane, a porównanie różnych maszyn ze sobą jest łatwiejsze. Równanie obwodu wzbudzenia w wielkościach względnych przyjmuje postać odpowiednio:

$$\frac{u_w}{U_{wn}} = \frac{R_w + R_{wd}}{U_{wn}} I_{wn} \frac{i_w}{I_{wn}} + \frac{L_w}{U_{wn}} I_{wn} \frac{d\dfrac{i_w}{I_{wn}}}{dt} \tag{32}$$

$$u_m = r_w i_m + l_w \frac{di_m}{dt} \tag{33}$$

$$R_{w0} = \frac{U_{wn}}{I_{wn}} \tag{34}$$

$$r_w = \frac{R_w + R_{wd}}{R_{wn}} \tag{35}$$

$$l_w = \frac{L_w}{R_{wn}} \tag{36}$$

Równanie momentu:

$$m = \varphi i \tag{37}$$

Jednym z podstawowych komplikacji analiz maszyn elektrycznych jest fakt nieliniowej zależności strumienia od prądu magnesującego, stąd dla przybliżonego uwzględnienia zjawisk nasyceniowych można aproksymować charakterystykę magnesowania w wielkościach względnych. Pomijając zjawisko histerezy magnetycznej można stosować wzór aproksymujący w postaci:

$$\varphi = \frac{i_m}{a\left|i_m\right| + (1-a)} \tag{38}$$

Przy czym:

$$a \approx 0.55 \div 0.65 \tag{39}$$

Nie jest to jedyne przybliżenie charakterystyki magnesowania. Często stosowany jest opis w postaci funkcji:

$$\varphi = a_0 \arctan(a_1 i) + a_2 i$$

Stosuje się także wielomiany lub inne funkcje aproksymujące:

$$B = \frac{aH}{1+bH} \tag{40}$$

a≅0.00273; b≅0.00149 (41)

$$B = \frac{a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + \ldots}{1 + b_1 H + b_2 H^2 + \ldots} \tag{42}$$

$$H = [k_1 \exp(k_2 B^2) + k_3]B \tag{43}$$

Należy przy tym pamiętać, że jest to jedynie przybliżenie zjawisk występujących w rzeczywistej maszynie. Równanie dynamiki dla ruchu obrotowego w wielkościach względnych przyjmuje postać:

$$\frac{J}{k\phi_n I_{tn}}\omega_0 \frac{d\dfrac{\omega}{\omega_0}}{dt} = m_e - m_0 \qquad (44)$$

$$j\frac{d\nu}{dt} = m - m_0 \qquad (45)$$

gdzie:

$$j = \frac{JU_{tn}}{k\phi_n^2 I_{tn}} \qquad (46)$$

Równania dla silnika obcowzbudnego równania przyjmują postać:

$$u_m = r_w i_m + l_w \frac{di_m}{dt} \qquad (47)$$

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi\nu \qquad (48)$$

$$m = \varphi i \qquad (49)$$

Dla znamionowego prądu wzbudzenia lub maszyn o magnesach trwałych $\varphi=1$ i $m=1$. W takim przypadku:

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \nu \qquad (50)$$

W stanie ustalonym, przy stałej prędkości kątowej:

$$v = \frac{u - ri}{\varphi} \tag{51}$$

Przy znamionowym prądzie wzbudzenia:

$$v = u - ri \tag{52}$$

$$v = u - rm \tag{53}$$

W silniku szeregowym:

$$i_m = i$$

W tym przypadku nie ma odrębnego równania dla obwodu wzbudzenia. Równanie obwodu twornika ma postać:

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi v \tag{54}$$

W maszynie szeregowej niezbędne jest uwzględnienie nasycenia obwodu magnetycznego np. w postaci aproksymacji:

$$\varphi = \frac{i}{a|i| + (1 - a)} \tag{55}$$

Przy czym:

$$r = \frac{R_t + R_{wsz} + R_d}{R_n} \tag{56}$$

$$l_w = \frac{L_t + L_w}{R_n} \tag{57}$$

Wartość strumienia zależy tu od prądu twornika, stąd z zakresie liniowej części charakterystyki magnesowania możemy napisać dla stanu ustalonego:

$$\varphi = i \tag{58}$$

$$v = \frac{u - ri}{i} \qquad (59)$$

$$v = \frac{u}{i} - r \qquad (60)$$

$$m = i^2 \qquad (61)$$

W silniku bocznikowym napięcie zasilające obwód wzbudzenia jest równe napięciu twornika, stąd:

$$u = ri + l\frac{di}{dt} + \varphi v \qquad (62)$$

$$u = r_w i_m + l_w \frac{di_m}{dt} \qquad (63)$$

$$i_0 = i_m + i \qquad (64)$$